Modélisation & Discrétisation, une petite introduction

Thierry Dumont

29 novembre 2008

La formule de Green

En dimension 1, on a l'intégration par parties :

$$\int_a^b u'(x)v(x)\,dx = -\int_a^b u(x)v'(x)dx + u(b)v(b) - u(a)v(a).$$

au delà, en dimension supérieure ?

Rappels

1. **gradient d'une fonction à valeurs scalaires**

$$\vec{g} = \overrightarrow{\text{grad}}\ u(\vec{x}) \tag{1}$$

Rappels

1. **gradient d'une fonction à valeurs scalaires**

$$\vec{g} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\ u(\vec{x}) \tag{1}$$

$$g_i = \frac{\partial u(\vec{x})}{\partial x_i}.$$

Rappels

1. **gradient d'une fonction à valeurs scalaires**

$$\vec{g} = \overrightarrow{\mathrm{grad}} \; u(\vec{x}) \tag{1}$$

$$g_i = \frac{\partial u(\vec{x})}{\partial x_i}.$$

2. **divergence d'une fonction à valeurs vectorielles**

$$\mathrm{div}\, \vec{u}(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u_i(\vec{x})}{\partial x_i}. \tag{2}$$

Propriété importante

(Le Laplacien) :

$$\mathrm{div}\ \overrightarrow{\mathrm{grad}}\ u(\vec{x}) = \Delta\ u. \tag{3}$$

avec :

$$\Delta\ u = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u(\vec{x})}{\partial x_i^2}. \tag{4}$$

La formule de Green

$$u(\vec{x}) \text{ et } \vec{v}(\vec{x}) = (v_1(\vec{x}), v_2(\vec{x}), \ldots, v_n(\vec{x}))^t$$

La formule de Green

$u(\vec{x})$ et $\vec{v}(\vec{x}) = (v_1(\vec{x}), v_2(\vec{x}), \ldots, v_n(\vec{x}))^t$
On a :

$$\int_\omega u(\vec{x})\ \mathrm{div}(\vec{v}(\vec{x}))d\omega = -\int_\omega \vec{\mathrm{grad}}(u(\vec{x})).\vec{v}(\vec{x})d\omega + \int_{\partial\omega} \vec{v}(\vec{x}).\vec{n}\, u(\vec{x})d\sigma. \tag{5}$$

(on retrouve l'intégration par parties en dimension 1).

Lois de conservation

Un *produit* de densité $u(x, t)$ au point x à l'instant t. On cherche un modèle mathématique pour $u(x, t)$.

Lois de conservation

Un *produit* de densité $u(x,t)$ au point x à l'instant t. On cherche un modèle mathématique pour $u(x,t)$.

Quantité de *produit* dans un domaine ω à l'instant t est :

$$Q_\omega(t) = \int_\omega u(x,t)d\omega.$$

Lois de conservation

Un *produit* de densité $u(x, t)$ au point x à l'instant t. On cherche un modèle mathématique pour $u(x, t)$.

Quantité de *produit* dans un domaine ω à l'instant t est :

$$Q_\omega(t) = \int_\omega u(x, t) d\omega.$$

Que vaut ?

$$\frac{dQ_\omega(t)}{dt}.$$

On écrit que cette variation par unité de temps est égale à la somme

1. de ce qui est amené ou retranché en chaque point x à chaque instant t : $f(x, t)$
2. et de ce qui rentre (ou sort) sous forme de flux au bord.

- On a $\omega = (a, b)$,

$$Q_\omega(t) = \int_a^b u(x,t)dx,$$

- On a $\omega = (a, b)$,

$$Q_\omega(t) = \int_a^b u(x,t)dx,$$

- ce qui est apporté ou retranché selon le signe de f est

$$\int_a^b f(x,t)dx,$$

- On a $\omega = (a, b)$,

$$Q_\omega(t) = \int_a^b u(x, t)dx,$$

- ce qui est apporté ou retranché selon le signe de f est

$$\int_a^b f(x, t)dx,$$

- le flux est formé de $\phi(a, t)$ et de $\phi(b, t)$.

$$\frac{d}{dt}\int_a^b u(x,t)\,dx = \phi(a,t) - \phi(b,t) + \int_a^b f(x,t)\,dx$$

$$\frac{d}{dt}\int_a^b u(x,t)\,dx = \phi(a,t) - \phi(b,t) + \int_a^b f(x,t)\,dx$$

$$\int_a^b \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\,dx = \phi(a,t) - \phi(b,t) + \int_a^b f(x,t)\,dx, \tag{6}$$

$$\int_a^b \frac{\partial\phi(x,t)}{\partial x} v(x)\, dx = -\int_a^b \phi(x,t)v^{'}(x)dx + \phi(b,t)v(b) - \phi(a,t)v(a).$$

$$\int_a^b \frac{\partial \phi(x,t)}{\partial x} v(x)\,dx = -\int_a^b \phi(x,t)v^{'}(x)dx + \phi(b,t)v(b) - \phi(a,t)v(a).$$

$v = 1,$

$$\int_a^b \frac{\partial \phi(x,t)}{\partial x} v(x)\, dx = -\int_a^b \phi(x,t) v^{'}(x) dx + \phi(b,t)v(b) - \phi(a,t)v(a).$$

$v = 1$,

$$\int_a^b \phi^{'} dx = \phi(b) - \phi(a).$$

Lois de conservation

$$\int_a^b \left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial \phi(x,t)}{\partial x} - f(x,t)\right)dx = 0. \tag{7}$$

Lois de conservation

$$\int_a^b \left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial \phi(x,t)}{\partial x} - f(x,t)\right)dx = 0. \tag{7}$$

ceci doit être indépendant de a et b, donc l'intégrande doit être nulle :

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial \phi(x,t)}{dx} = f(x,t) \tag{8}$$

Il faut maintenant *fermer* le système, c'est à dire relier ϕ et u.

Exemple : l'équation de la chaleur.

ϕ est donné par la loi de Fourier

$$\phi(x,t) = -k\frac{\partial u(x,t)}{dx},$$

Exemple : l'équation de la chaleur.

ϕ est donné par la loi de Fourier

$$\phi(x,t) = -k\frac{\partial u(x,t)}{dx},$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} - k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f. \tag{9}$$

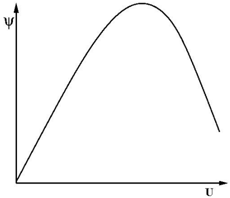
Un modèle des embouteillages

ϕ relié à *u* plutôt qu'à ses dérivées ;

Un modèle des embouteillages

ϕ relié à *u* plutôt qu'à ses dérivées ;

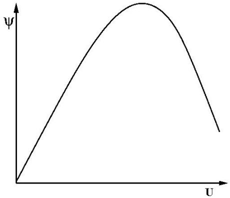
on pense à $\phi(x,t) = \psi(u(x,t))$ ou ψ est une fonction concave.



Un modèle des embouteillages

ϕ relié à u plutôt qu'à ses dérivées ;

on pense à $\phi(x,t) = \psi(u(x,t))$ ou ψ est une fonction concave.



$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial \psi((u(x,t)))}{\partial x} = 0. \qquad (10)$$

En dimension 2, 3.. ou n

- Le flux ϕ est un vecteur $\vec{\phi}$

En dimension 2, 3.. ou n

- Le flux ϕ est un vecteur $\vec{\phi}$
- Le flux entrant ou sortant d'un domaine ω est $\vec{\phi}.\vec{n}$

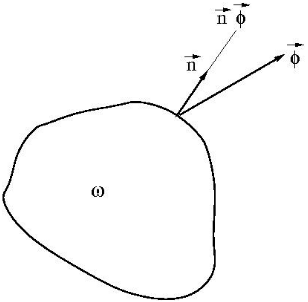


FIG.: le flux.

Utiliser, à la place de l'intégration par parties en dimension un, la formule de Green pour réécrire le flux sous forme d'une intégrale sur ω :

Utiliser, à la place de l'intégration par parties en dimension un, la formule de Green pour réécrire le flux sous forme d'une intégrale sur ω :

$$\int_{\omega} v(\vec{x})\ \mathrm{div}(\vec{\phi}(\vec{x}))d\omega = -\int_{\omega} \vec{\mathrm{grad}}(v(\vec{x}))\ \vec{\phi}(\vec{x})d\omega + \int_{\partial\omega} \vec{\phi}(\vec{x}).\vec{n}\,(v(\vec{x}))d\partial\omega \tag{11}$$

$$\int_\omega v(\vec{x})\ \mathrm{div}(\vec{\phi}(\vec{x}))d\omega = -\int_\omega \vec{\mathrm{grad}}(v(\vec{x}))\ \vec{\phi}(\vec{x})d\omega + \int_{\partial\omega} \vec{\phi}(\vec{x}).\vec{n}\,(v(\vec{x}))d\partial\omega$$

$$\int_\omega v(\vec{x})\ \mathrm{div}(\vec{\phi}(\vec{x}))d\omega = -\int_\omega \vec{\mathrm{grad}}(v(\vec{x}))\ \vec{\phi}(\vec{x})d\omega + \int_{\partial\omega} \vec{\phi}(\vec{x}).\vec{n}\,(v(\vec{x}))d\partial\omega$$

$v = 1$

$$\int_\omega v(\vec{x})\ \mathrm{div}(\vec{\phi}(\vec{x}))d\omega = -\int_\omega \vec{\mathrm{grad}}(v(\vec{x}))\ \vec{\phi}(\vec{x})d\omega + \int_{\partial\omega} \vec{\phi}(\vec{x}).\vec{n}\,(v(\vec{x}))d\partial\omega$$

$v = 1$

$$\int_\Omega \mathrm{div}(\vec{\phi}(\vec{x}))d\Omega = \int_\sigma \vec{\phi}(\vec{x}).\vec{n}\ d\sigma. \tag{12}$$

Loi de conservation

$$\int_{\omega} (\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + \mathrm{div}(\vec{\phi}(\vec{x})) - f(x,t))\, d\omega = 0. \tag{13}$$

Loi de conservation

$$\int_\omega \left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + \mathrm{div}(\vec{\phi}(\vec{x})) - f(x,t)\right) d\omega = 0. \tag{13}$$

doit être vérifiée pour tout ω. L'intégrande doit donc être nulle :

Loi de conservation

$$\int_{\omega}(\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + \mathrm{div}(\vec{\phi}(\vec{x})) - f(x,t))\, d\omega = 0. \qquad (13)$$

doit être vérifiée pour tout ω. L'intégrande doit donc être nulle :

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + \mathrm{div}(\vec{\phi}(\vec{x})) - f(x,t) = 0. \qquad (14)$$

Loi de conservation

$$\int_\omega \left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + \mathrm{div}(\vec{\phi}(\vec{x})) - f(x,t)\right) d\omega = 0. \tag{13}$$

doit être vérifiée pour tout ω. L'intégrande doit donc être nulle :

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + \mathrm{div}(\vec{\phi}(\vec{x})) - f(x,t) = 0. \tag{14}$$

Il faut “fermer” l'équation et donc rajouter une loi “physique” relient $\vec{\phi}$ et u.

Exemples :

- l'équation de la chaleur : $\vec{\phi}$ est donné par la loi de Fourier

$$\vec{\phi}(x,t) = -k \ \vec{\text{grad}} \ u(x,t),$$

Exemples :

- l'équation de la chaleur : $\vec{\phi}$ est donné par la loi de Fourier

$$\vec{\phi}(x,t) = -k \ \vec{\mathrm{grad}} \ u(x,t),$$

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - k\Delta u(x,t) = f(x,t). \tag{15}$$

Exemples :

- l'advection :

$$\vec{\phi}(x,t) = u(x,t)\vec{v},$$

Exemples :

- l'advection :

$$\vec{\phi}(x,t) = u(x,t)\vec{v},$$

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + \mathrm{div}(u(x,t)\vec{v}) = f(x,t).$$

Exemples :

- l'advection :

$$\vec{\phi}(x,t) = u(x,t)\vec{v},$$

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + \mathrm{div}(u(x,t)\vec{v}) = f(x,t).$$

si $\vec{v}$ ne dépend pas de $\vec{x}$:

$$\mathrm{div}(u(x,t)\vec{v}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial (uv)_i}{\partial x_i} = v_i \frac{\partial u}{\partial x_i} = \vec{v}.\,\vec{\mathrm{grad}}(u).$$

Exemples :

- l'advection :

$$\vec{\phi}(x,t) = u(x,t)\vec{v},$$

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + \mathrm{div}(u(x,t)\vec{v}) = f(x,t).$$

si $\vec{v}$ ne dépend pas de $\vec{x}$:

$$\mathrm{div}(u(x,t)\vec{v}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial (uv)_i}{\partial x_i} = v_i \frac{\partial u}{\partial x_i} = \vec{v}.\,\vec{\mathrm{grad}}(u).$$

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + \vec{v}.\,\vec{\mathrm{grad}}(u) = f(x,t). \tag{16}$$

On sait résoudre facilement à la main

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + \vec{v}.\,\vec{\mathrm{grad}}(u) = f(x,t).$$

si $\vec{v}$ est indépendant du temps (en plus de l'espace) et si de plus $f = 0$.

On sait résoudre facilement à la main

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + \vec{v}.\,\vec{\mathrm{grad}}(u) = f(x,t).$$

si $\vec{v}$ est indépendant du temps (en plus de l'espace) et si de plus $f = 0$.

- $U(x)$ la condition initiale, vérifiée par u en $t = 0$.
- alors : $u(x,t) = U(x - t\vec{v})$

On sait résoudre facilement à la main

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + \vec{v}.\,\vec{\mathrm{grad}}(u) = f(x,t).$$

si $\vec{v}$ est indépendant du temps (en plus de l'espace) et si de plus $f = 0$.

- $U(x)$ la condition initiale, vérifiée par u en $t = 0$.
- alors : $u(x,t) = U(x - t\vec{v})$

  Il suffit de dériver $U(x - t\vec{v})$ par rapport au temps t.

Comment dire qu'un fluide $\vec{u}$ est incompressible ?

Dire que, dans tout domaine ω, tout le fluide qui rentre ressort, c'est à dire que :

$$\int_{\partial\omega} \vec{u}.\vec{n}\,\mathrm{ds} = 0.$$

Comment dire qu'un fluide $\vec{u}$ est incompressible ?

Dire que, dans tout domaine ω, tout le fluide qui rentre ressort, c'est à dire que :

$$\int_{\partial\omega} \vec{u}.\vec{n}\,\mathrm{ds} = 0.$$

Green avec $v = 1$ donne :

$$\int_{\omega} \mathrm{div}\,\vec{u}\,\mathrm{d}\omega = 0.$$

et donc en en déduit la condition d'incompressibilité :

$$\mathrm{div}\,\vec{u} = 0.$$

(L'advection) :

$$\mathrm{div}(\vec{v}u) = \vec{v}\,\vec{\mathrm{grad}}\,u$$

donc si v est incompressible l'équation d'advection s'écrit :

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + \vec{v}.\vec{\mathrm{grad}}(u) = f(x,t). \tag{17}$$

Mécanique (des solides et des fluides)

Équations de Navier (déformation des solides) et de Navier–Stokes (fluides)...

Mécanique (des solides et des fluides)

Équations de Navier (déformation des solides) et de Navier–Stokes (fluides)...

Plus complexe (tenseurs).

Bilan des forces sur la frontière d'un petit morceau ω de matériau (solide, fluide)

Mécanique (des solides et des fluides)

Équations de Navier (déformation des solides) et de Navier–Stokes (fluides)...

Plus complexe (tenseurs).

Bilan des forces sur la frontière d'un petit morceau ω de matériau (solide, fluide) transformation en intégrale sur ω.

Mécanique (des solides et des fluides)

Équations de Navier (déformation des solides) et de Navier–Stokes (fluides)...

Plus complexe (tenseurs).

Bilan des forces sur la frontière d'un petit morceau ω de matériau (solide, fluide) transformation en intégrale sur ω.

Exemple : conservation de la masse d'un fluide :

Mécanique (des solides et des fluides)

Équations de Navier (déformation des solides) et de Navier–Stokes (fluides)...

Plus complexe (tenseurs).

Bilan des forces sur la frontière d'un petit morceau ω de matériau (solide, fluide) transformation en intégrale sur ω.

Exemple : conservation de la masse d'un fluide :
La vitesse est $\vec{u}$, la densité ρ, constante. La conservation de la masse s'écrit simplement :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \,\mathrm{div}\, \vec{u} = 0.$$

Discrétisation : une très petite introduction

Phase dangereuse !

Discrétisation : une très petite introduction

Phase dangereuse !

Si le problème est indépendant du temps et linéaire : système linéaire $AX = B$.

Discrétisation : une très petite introduction

Phase dangereuse !

Si le problème est indépendant du temps et linéaire : système linéaire $AX = B$.

- les différences finies
- les éléments finis
- les volumes finis.

Les différences finies

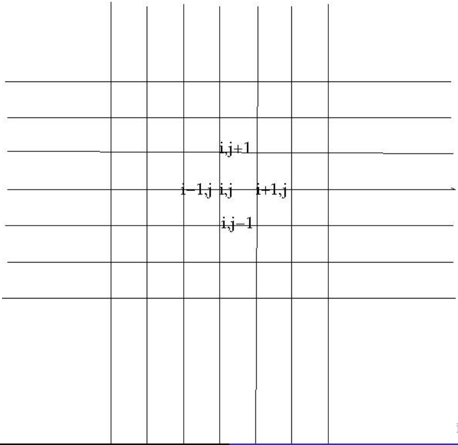
Domaines : réunions de boites à cotés parallèles aux axes.

Les différences finies

Domaines : réunions de boites à cotés parallèles aux axes.
Grille de pas h dans les deux directions (pour simplifier).

Les différences finies

Domaines : réunions de boites à cotés parallèles aux axes.
Grille de pas *h* dans les deux directions (pour simplifier).



Les différences finies

$$\frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{h},$$

pour approcher la dérivée de u par rapport à x.

Les différences finies

$$\frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{h},$$

pour approcher la dérivée de u par rapport à x.

la dérivée seconde par rapport à x sera donc approchée par :

$$\frac{\frac{u_{i+1,j}-u_{i,j}}{h} - \frac{u_{i,j}-u_{i-1,j}}{h}}{h} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2}.$$

Les différences finies

$$\frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{h},$$

pour approcher la dérivée de u par rapport à x.

la dérivée seconde par rapport à x sera donc approchée par :

$$\frac{\frac{u_{i+1,j}-u_{i,j}}{h} - \frac{u_{i,j}-u_{i-1,j}}{h}}{h} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2}.$$

Les différences finies

En dimension 2, pour approcher $\Delta u = f$:

En chaque point (i, j) :

$$\frac{u_{i+1,j} + u_{i,j+1} - 4u_{i,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j-1}}{h^2} = f_{i,j}$$

où $f_{i,j}$ est la valeur de f au point (i, j).

Système linéaire dont les inconnues sont les $u_{i,j}$

Les différences finies et l'équation de la chaleur

U : vecteur des $u_{i,j}$

Les différences finies et l'équation de la chaleur

U : vecteur des $u_{i,j}$

$AU = F$ pour l'équation de Poisson.

Système *d'équations différentielles ordinaires* linéaire

$$\frac{dU}{dt} = AU + F.$$

Remarques :

- A est une matrice creuse (5 termes non nuls par ligne en dimension 2, 7 termes en dimension 3.

Remarques :

- A est une matrice creuse (5 termes non nuls par ligne en dimension 2, 7 termes en dimension 3.
- ses valeurs propres sont dans l'intervalle $(1, 1/h^2)$ (le conditionnement est en $1/h^2$).

Remarques :

- A est une matrice creuse (5 termes non nuls par ligne en dimension 2, 7 termes en dimension 3.
- ses valeurs propres sont dans l'intervalle $(1, 1/h^2)$ (le conditionnement est en $1/h^2$). Conséquences :
  - les méthodes itératives convergent donc d'autant plus lentement que h est petit.

Remarques :

- A est une matrice creuse (5 termes non nuls par ligne en dimension 2, 7 termes en dimension 3.
- ses valeurs propres sont dans l'intervalle $(1, 1/h^2)$ (le conditionnement est en $1/h^2$). Conséquences :
  - les méthodes itératives convergent donc d'autant plus lentement que h est petit.
  - pour l'équation de la chaleur, on a à faire à un *système d'EDOs RAIDE*.

Remarques :

- A est une matrice creuse (5 termes non nuls par ligne en dimension 2, 7 termes en dimension 3.
- ses valeurs propres sont dans l'intervalle $(1, 1/h^2)$ (le conditionnement est en $1/h^2$). Conséquences :
  - les méthodes itératives convergent donc d'autant plus lentement que h est petit.
  - pour l'équation de la chaleur, on a à faire à un *système d'EDOs RAIDE*.

Les éléments finis

Avantages :

- adaptation à des géométries complexes (mailleurs) ;

Les éléments finis

Avantages :

- adaptation à des géométries complexes (mailleurs) ;
- “toutes” les familles classiques d’équations (élasticité, chaleur, fluides) ;

Les éléments finis

Avantages :

- adaptation à des géométries complexes (mailleurs) ;
- “toutes” les familles classiques d’équations (élasticité, chaleur, fluides) ;
- étude mathématique très poussée ;

Les éléments finis

Avantages :

- adaptation à des géométries complexes (mailleurs) ;
- “toutes” les familles classiques d’équations (élasticité, chaleur, fluides) ;
- étude mathématique très poussée ;
- programmation intéressante.

Les éléments finis : forme faible des équations

Équation de Poisson $\Delta u = f$ + formule de Green :

$$\int_\omega \vec{\mathrm{grad}}\, u.\, \vec{\mathrm{grad}}\, v \; d\omega = -\int_\omega f(x)v(x)d\omega. \tag{18}$$

Les éléments finis : forme faible des équations

Équation de Poisson $\Delta u = f$ + formule de Green :

$$\int_\omega \vec{\mathrm{grad}}\, u . \vec{\mathrm{grad}}\, v \; d\omega = - \int_\omega f(x) v(x) d\omega. \tag{18}$$

Idée :

Approcher u par une combinaison linéaire

$$u = \sum_{i=0}^{k} u_i \phi_i(\vec{x})$$

.

Les éléments finis : forme faible des équations

Équation de Poisson $\Delta u = f$ + formule de Green :

$$\int_{\omega} \vec{\mathrm{grad}}\, u . \vec{\mathrm{grad}}\, v \; d\omega = - \int_{\omega} f(x) v(x) d\omega. \tag{18}$$

Idée :

Approcher u par une combinaison linéaire

$$u = \sum_{i=0}^{k} u_i \phi_i(\vec{x})$$

.

On prend pour v les ϕ_j :

$$\sum_{i=0}^{k} u_i \int_{\omega} \vec{\operatorname{grad}}\, \phi_i . \vec{\operatorname{grad}}\, \phi_j \; d\omega = \int_{\omega} f \phi_j d\omega.$$

On prend pour v les ϕ_j :

$$\sum_{i=0}^{k} u_i \int_{\omega} \vec{\mathrm{grad}}\, \phi_i . \vec{\mathrm{grad}}\, \phi_j \; d\omega = \int_{\omega} f \phi_j d\omega.$$

système linéaire : $KU = F$ avec :

- $$K_{i,j} = \int_{\omega} \vec{\mathrm{grad}}\, \phi_i . \vec{\mathrm{grad}}\, \phi_j d\omega$$

On prend pour v les ϕ_j :

$$\sum_{i=0}^{k} u_i \int_\omega \vec{\mathrm{grad}}\,\phi_i . \vec{\mathrm{grad}}\,\phi_j \; d\omega = \int_\omega f \phi_j d\omega.$$

système linéaire : $KU = F$ avec :

- $$K_{i,j} = \int_\omega \vec{\mathrm{grad}}\,\phi_i . \vec{\mathrm{grad}}\,\phi_j d\omega$$
- $$F_i = \int_\omega F \; \phi_i \; d\omega$$

- On veut que ce système linéaire soit le plus creux possible : pour cela il faut que $K_{i,j}$ soit nul pour la majorité des couples (i, j)

- On veut que ce système linéaire soit le plus creux possible : pour cela il faut que $K_{i,j}$ soit nul pour la majorité des couples (i, j)
- On veut aussi que les grandeurs $K_{i,j}$ soient faciles à calculer.

- On veut que ce système linéaire soit le plus creux possible : pour cela il faut que $K_{i,j}$ soit nul pour la majorité des couples (i, j)
- On veut aussi que les grandeurs $K_{i,j}$ soient faciles à calculer.

Elements finis de degré 1

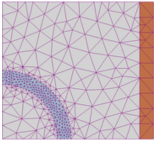


FIG.: Un maillage en triangles

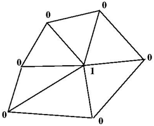


FIG.: Une fonction élémentaire

Elements finis de degré 1 et équation de la chaleur

$u(x,t)$ est cherchée sous la forme

$$u(x,t) = \sum_{i=0}^{k} u_i(t)\phi_i(\vec{x}).$$

Elements finis de degré 1 et équation de la chaleur

$u(x,t)$ est cherchée sous la forme

$$u(x,t) = \sum_{i=0}^{k} u_i(t)\phi_i(\vec{x}).$$

En injectant cette expression dans l'équation, multipliée par v_i et intégrée sur ω on obtient, en notant $U(t)$ le vecteur des $u_i(t), i = 1, k$:

$$M\frac{\partial U(t)}{\partial t} = KU(t) + F.$$

$M_{i,j} = \int_\omega \phi_i\phi_j d\omega.$

Elements finis de degré 1 et équation de la chaleur

$u(x,t)$ est cherchée sous la forme

$$u(x,t) = \sum_{i=0}^{k} u_i(t)\phi_i(\vec{x}).$$

En injectant cette expression dans l'équation, multipliée par v_i et intégrée sur ω on obtient, en notant $U(t)$ le vecteur des $u_i(t), i = 1, k$:

$$M\frac{\partial U(t)}{\partial t} = KU(t) + F.$$

$M_{i,j} = \int_\omega \phi_i \phi_j d\omega.$

Système d'EDOs raide.

les volumes finis

On discrétise les *flux*.

les volumes finis

On discrétise les *flux*.

L'équation de la chaleur.

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - k\Delta u(x,t) = f(x,t).$$

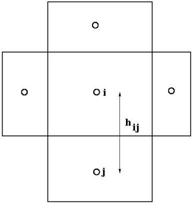
les volumes finis

On discrétise les *flux*.

L'équation de la chaleur.

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - k\Delta u(x,t) = f(x,t).$$

volumes = rectangles (pour simplifier énormément).



Approximation *constante* pour *u* dans chaque volume ω.

Approximation *constante* pour u dans chaque volume ω.

u_i la valeur de u (discrétisée, l'inconnue) dans le volume ω_i,

Approximation *constante* pour u dans chaque volume ω.

u_i la valeur de u (discrétisée, l'inconnue) dans le volume ω_i,

Green+ v constant :

$$\frac{d}{dt}u_i = \frac{d}{dt}\int_\omega u d\omega = \int_{\partial\omega}\phi(u_i) d\partial\omega. \tag{19}$$

On a $\phi(u_i) = \text{dérivée de } u \text{ dans la direction normale à la frontière.}$

Approximation *constante* pour u dans chaque volume ω.

u_i la valeur de u (discrétisée, l'inconnue) dans le volume ω_i,

Green+ v constant :

$$\frac{d}{dt}u_i = \frac{d}{dt}\int_{\omega} u d\omega = \int_{\partial\omega} \phi(u_i) d\partial\omega. \tag{19}$$

On a $\phi(u_i) = \text{dérivée de } u \text{ dans la direction normale à la frontière.}$

On prend : $\frac{u_i - u_j}{h_{ij}}$ comme flux sur la frontière commune aux volumes i et j.

- dans ce cas très simple : discrétisation “identique” aux différences finies,

- dans ce cas très simple : discrétisation “identique” aux différences finies,
- généralisation à des volumes plus compliqués,

- dans ce cas très simple : discrétisation “identique” aux différences finies,
- généralisation à des volumes plus compliqués,
- en choisissant des flux plus compliqués (souvent très compliqués) on peut résoudre des problèmes très difficiles (par exemple le problème des embouteillages, cités plus haut).

that’s all, folks..