

Ecole Thématique Visualisation Scientifique du CNRS

Aussois 9-13 Mai 2005

Identification de structures tourbillonnaires par des algorithmes de type POD

Joël Delville

LEA UMR CNRS 6609 Université de Poitiers ENSMA

Joel.delville@lea.univ-poitiers.fr



1

2

Organisation du cours:



(1 → *les bases*)

- 1) Introduction
 - 1.1 Les structures en écoulement turbulent
 - 1.2 Besoin d'introduire des définitions et outils rigoureux
 - 1.3 Utilité du concept de structure
 - 1.4 Techniques d'*éducation* des structures turbulentes
- 2) Bases de la POD
 - 2.1 Introduction à la POD
 - 2.2 Théorèmes de la POD
 - 2.3 Propriétés de la POD
 - 2.4 POD et Fourier
 - 2.5 Considérations pratiques
- 3) Variantes de la POD
 - 3.1 POD classique
 - 3.2 Snapshot POD

3

Organisation du cours:



(2 → *exemples commentés et développements*)

- 4) A quoi peut servir la POD?
 - 4.1 Extraction d'organisation, de « structure », filtrage
 - 4.2 Compression de données
 - 4.3 POD-Galerkin → LODS (réduction de modèle)
 - 4.4 POD & Contrôle
 - 4.5 Estimation Stochastique
- 5) Illustration sur un cas concret, complet ... *de plus en plus compliqué*
la couche de mélange
- 6) Autres exemples d'application de la POD
- 7) Identification de LODS via la POD
- 8) POD étendue.

4

nombreuses contributions



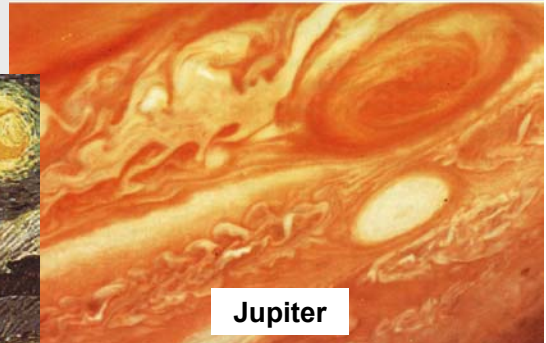
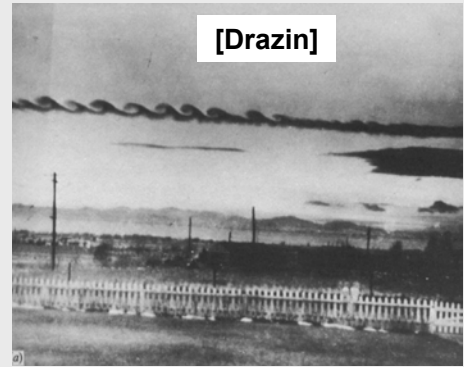
1) Introduction



I) Introduction

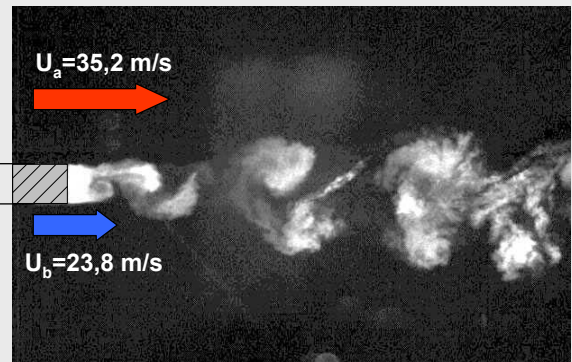
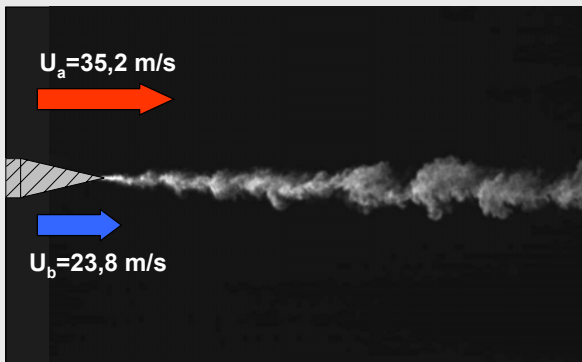
1.1. les structures en écoulement turbulent : on en voit partout !

a) dans la nature



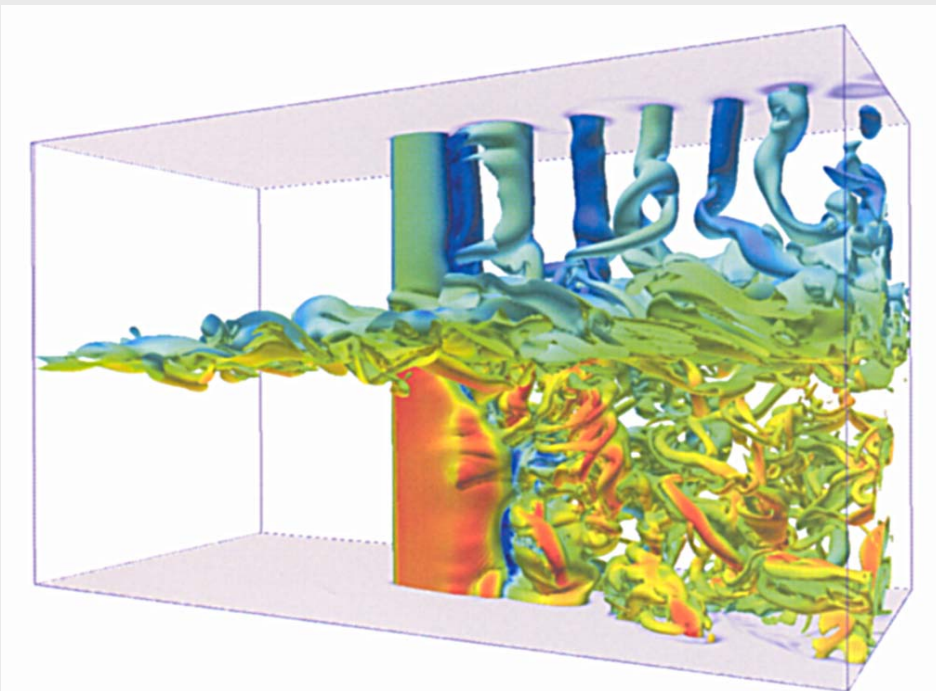
7

b) dans les visualisations expérimentales



Visualisation de l'influence de la nature du bord de fuite de la plaque séparatrice sur le développement aval d'une couche de mélange [Perret 2004]

8



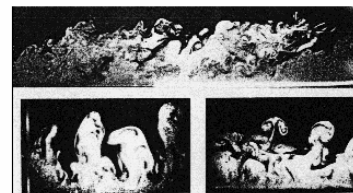
Interactions couche de mélange/sillage autour d'un barreau cylindrique.
Eric Lamballais & Jorge Silvestrini (LEA-Poitiers & PUCRS-Porto Alegre).
Journal of Turbulence 3 (2002) 028, <http://jot.iop.org/>

d) conduit à introduire
des concepts

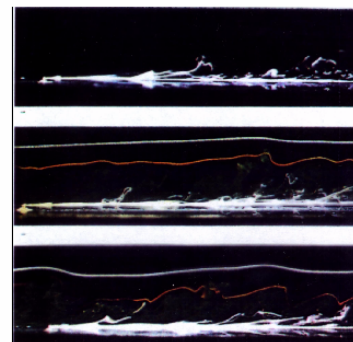
Pour décrire
ce que l'on observe

Exemple des
écoulements de paroi

Bursts
Hairpins
Streaks
Spots
Worms
Mushrooms
Sweeps
Horseshoes
Ejections
[cf Dubrovnik Consensus]



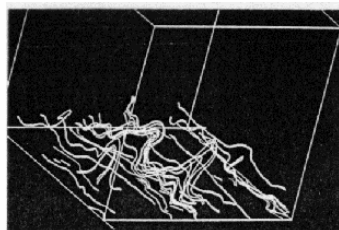
[Falco]



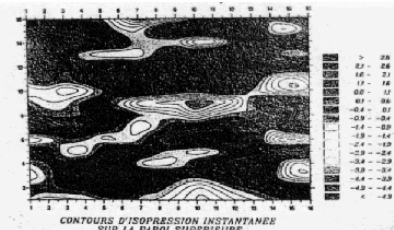
[Dumas]



[Kline]

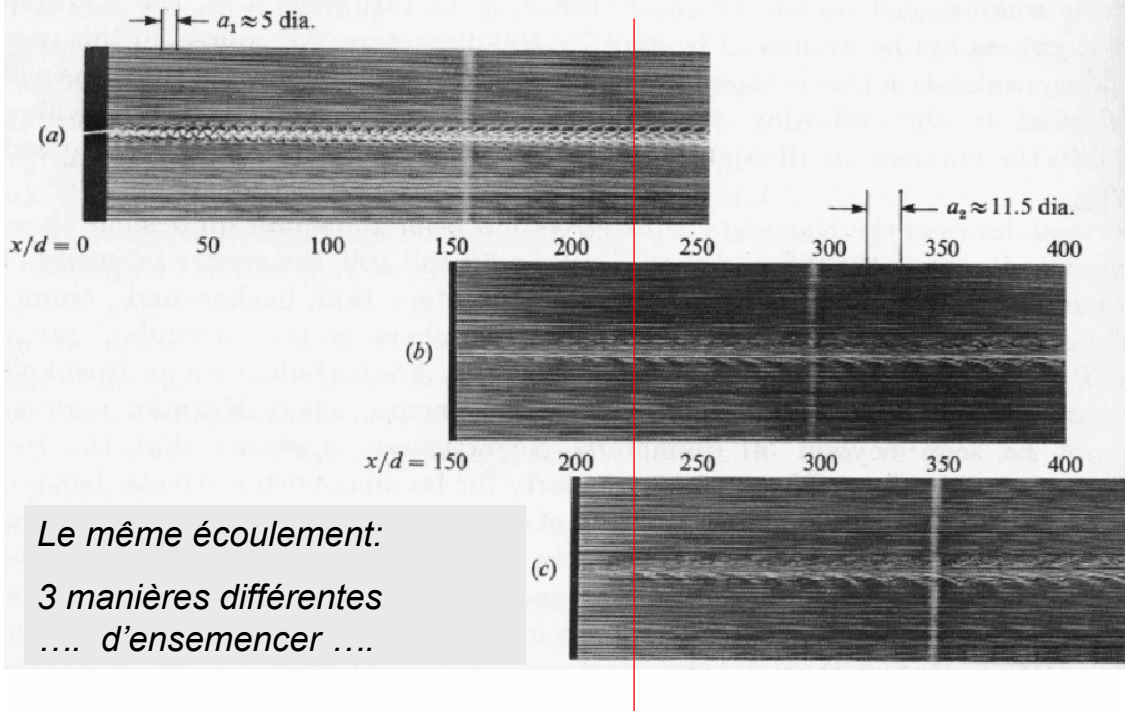


(IMG)



(IMFM)

e) De belles image mais peut conduire à des interprétations fausses



Comparisons of visualizations obtained for different seeding locations in the wake of a cylinder ($Re = 130$) after Cimbalá *et al.* (JFM 1988)
Smoke wire at a) $x/d = 8$; b) $x/d = 150$; c) $x/d = 200$

11



1.2) Besoin d'introduire des définitions
et des outils *rigoureux*

12



Problème : Autant de définitions que d'auteurs ...

F. Hussain:

“A *Coherent Structure* is defined as a flow module with instantaneous **phase-correlated vorticity**”. F.H. introduces the CS *eduction* concept

M. Lesieur:

Suppose that, at a given time t_0 it exists a vorticity concentration within a domain $D_{t_0} \subset R^3$. Let D_t be the image of D_{t_0} at $t \geq t_0$.

D_t is a *Coherent Structure (coherent vortex)* if :

- i) D_t keeps a **recognizable pattern** for time delays greater (typically 5 times) than the turnover time (ω_0^{-1}).
- ii) D_t is **unpredictable** (i.e. extremely sensitive to small perturbations of initial conditions).

J. Lumley:

“organized spatial features which repeatedly appear (often in flows dominated by local shear) and undergo a characteristic temporal life cycle”.

“Building Blocks” (basis of non-specified functions) based on the notion of *more or less “energetic modes” on which the velocity field is projected*. Using the Shot-Noise theory, for example, typical representations of the CS can be provided.

13

R. Adrian:

The “**Conditional Eddy**” introduced by Adrian is **defined by the event itself**. This eddy is used to detect other structures of similar type. The Stochastic estimation uses the conditional information specified at one or more locations to estimate the information at the remaining locations. This concept does not imply quasi-periodicity of the flow, nor any mechanism related to the generation of Reynolds stress.

Encore des définitions...



J.C. Hunt

Classifies CS in **topological** way.

Other proposals from [Wither Turbulence?... 1990]:

A.E. Perry:

A **pattern which occurs periodically** but not necessarily ordered (scale and convection velocities being random), but its orientation is fixed.

S. Kline:

Recursive events contributing to the dynamics: Production of Reynolds stress.

Wyganski:

CS associated with the **dominant modes of the instability**.

Stull:

Entities which contribute to **transport** of momentum and passive scalars on given distances without considerable diffusion.

14



1.3) Utilité du concept de structure?

15

1.3 Utilité du concept de structure?



Influence certaine sur les phénomènes de :

- **Bruits – vibrations**
 - Les structures ont des échelles, des modes d'organisation spatiaux privilégiés
 - → caractère quasi-périodique → fréquence privilégiée
 - Elles sont liées à la notion de vorticité (+/- cohérente)
 - Les centres de tourbillon correspondent à des zones dépressionnaires.
- **Traînée turbulente**
 - La production d'énergie turbulente apparaît aux interfaces entre les structures
 - Dans les écoulements proches de paroi → traînée turbulente
 - Rôle dans les écoulements transitoires
- **Processus de mélange**
 - Ces structures sont à grande échelle
 - Elles sont très fortement 3D

16



Energy contained in CS after Fiedler [TU-Berlin]

WHAT FRACTION OF TURBULENT ENERGY IS COHERENT ?

- SOME "ESTIMATES"

PLANE MIXING LAYER	20 %
ACCELERATED MIXING LAYER	25%
NEAR JET	>25%
AXISYMMETRIC FAR JET	10%
NEAR WAKE	25%
FAR WAKE	20%

FOR COMPARISON:	
WALL BOUNDED FLOW	<10%



Définir la *structure* sur un critère énergétique peut-être limitatif

C'est pourtant ce que fait la POD

Toutefois l'énergie est localisée aux frontières des structures...

HOWEVER: IMPORTANCE OF CS IS NOT ITS ENERGY CONTENT BUT ITS REDISTRIBUTIVE CAPACITIES

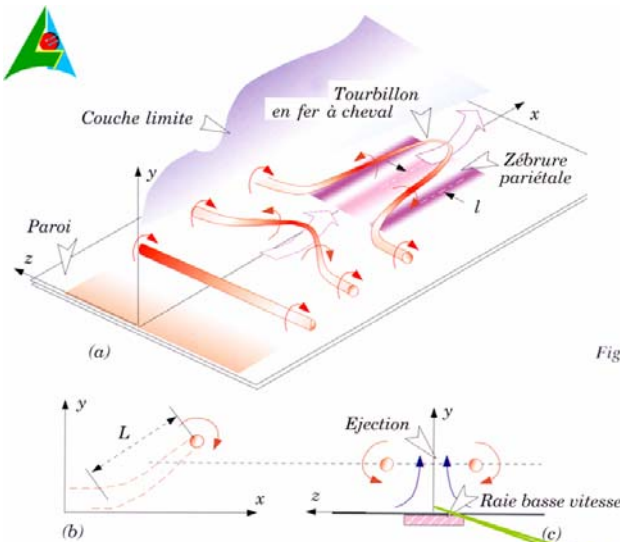


Fig. 14: Modèle de structure cohérente en "fer à cheval" ou "épingle à cheveux" en couche limite sur plaque plane.

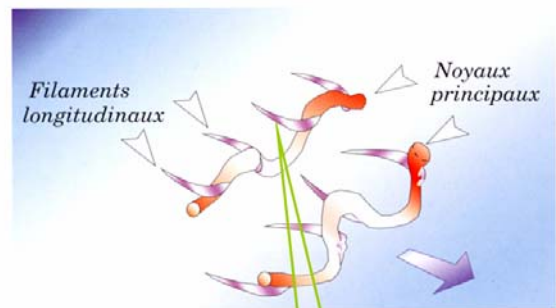
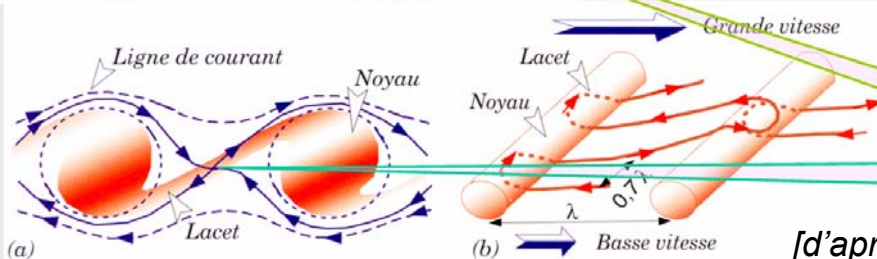


Fig. 17: Schéma de structures tourbillonnaires d'un sillage plan, adapté de Hussain et al.

Rappel de

3 grandes familles de structures:

Couche limite - sillage - couche de mélange



Production d'énergie turbulente

[d'après Chassaing]

Fig. 15: Topologie tourbillonnaire en zone de mélange : (a) organisation tourbillonnaire et lignes de courant, adapté de Corcos et Sherman [78], (b) noyaux entrelacés d'après Bernal et Roshko [25].



1.4) Eduction des structures*

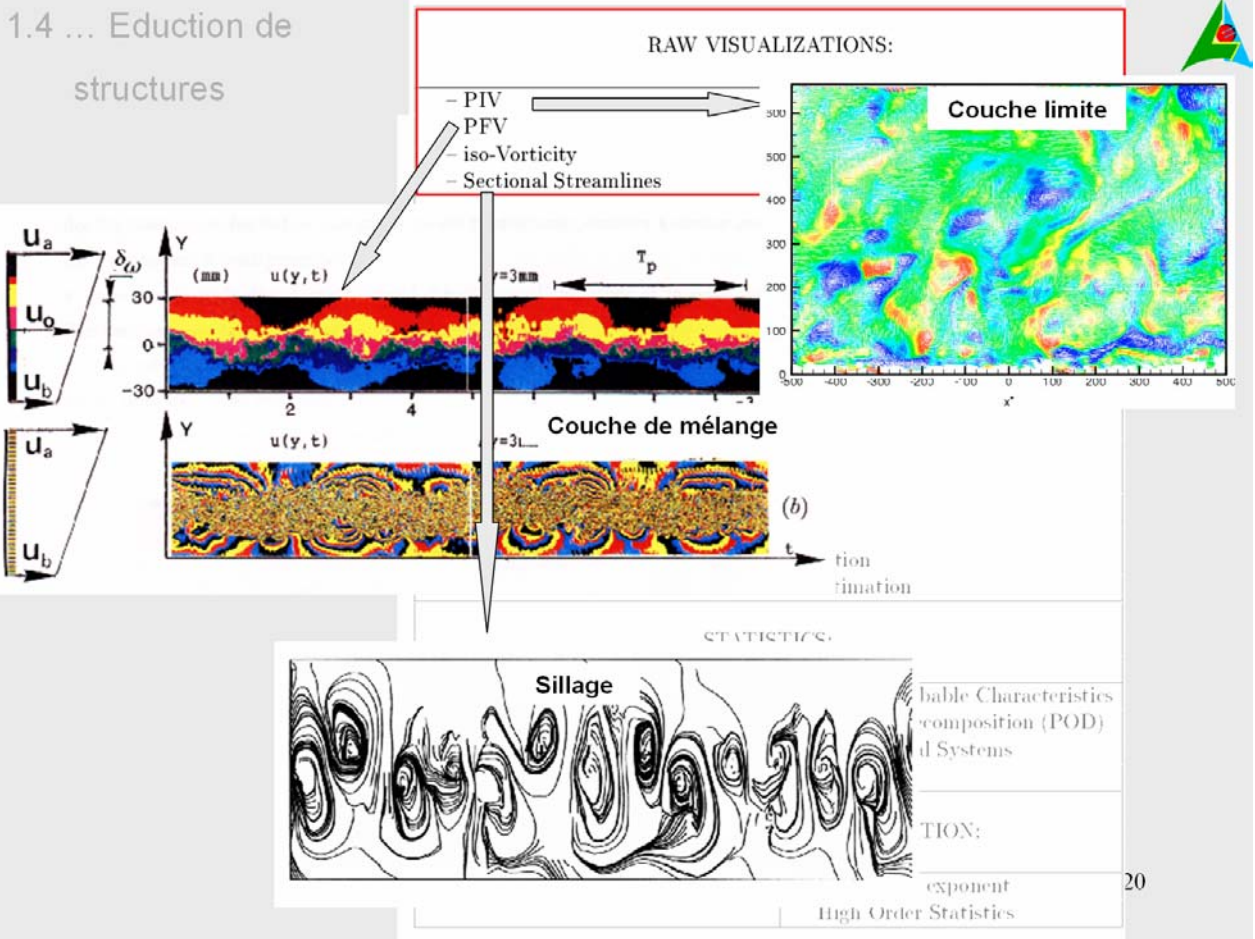
* optionnel

1.4 ... Eduction de structures

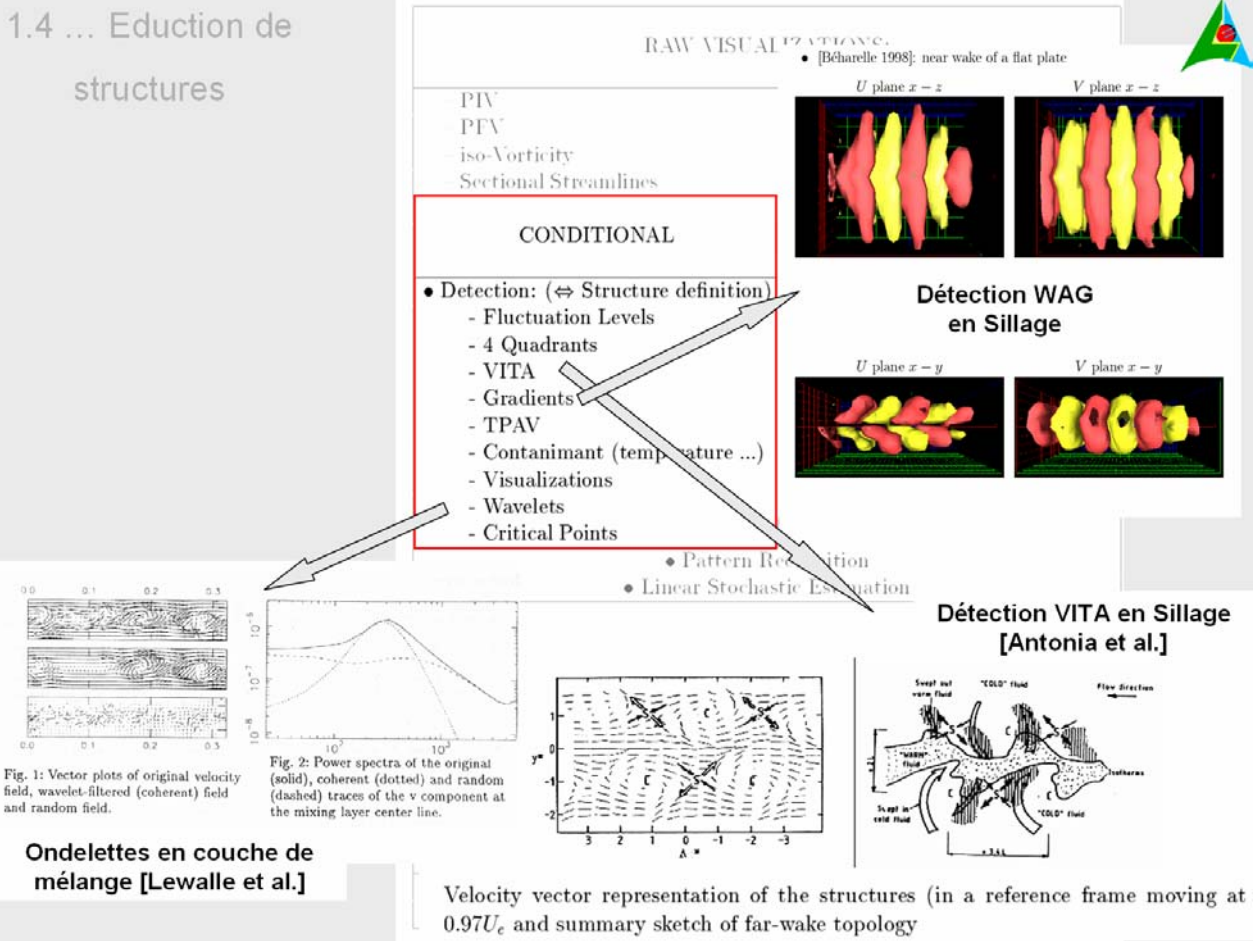


RAW VISUALIZATIONS:	
<ul style="list-style-type: none"> - PIV - PFV - iso-Vorticity - Sectional Streamlines 	
CONDITIONAL	Non-CONDITIONAL
<ul style="list-style-type: none"> • Detection: (\Leftrightarrow Structure definition) <ul style="list-style-type: none"> - Fluctuation Levels - 4 Quadrants - VITA - Gradients - TPAV - Contanimant (temperature ...) - Visualizations - Wavelets - Critical Points 	<ul style="list-style-type: none"> • Space-Time Correlation & Spectral Analysis & Filters • Orthogonal Decomposition
<ul style="list-style-type: none"> • Pattern Recognition • Linear Stochastic Estimation 	
STATISTICS:	
<ul style="list-style-type: none"> - Ensemble Average - Multiple Decomposition - CS dynamics - Statistical Properties 	<ul style="list-style-type: none"> - More Probable Characteristics - Modal Decomposition (POD) - Dynamical Systems
DYNAMICAL SYSTEM IDENTIFICATION:	
	<ul style="list-style-type: none"> Lyapounov exponent High Order Statistics

1.4 ... Education de structures



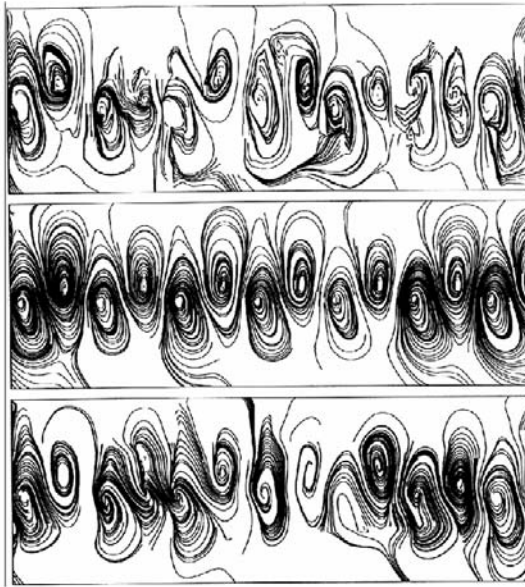
1.4 ... Education de structures



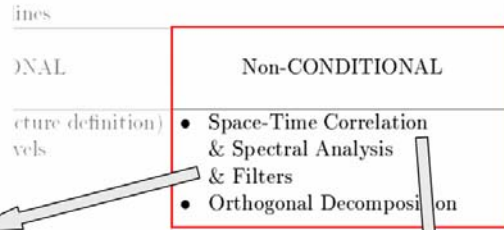


PIV
DPIV

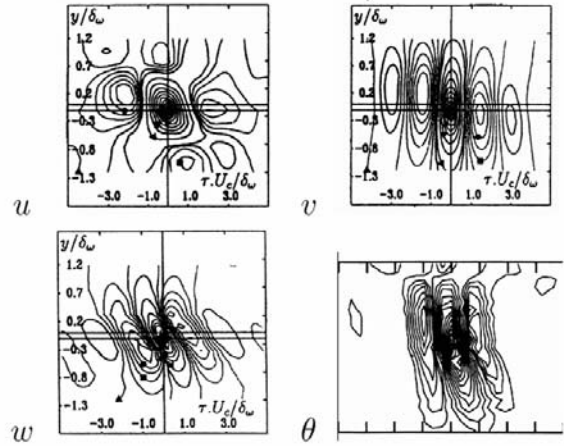
time-frequency filtering in the wake: [De Souza 1996]



comparison for a given time sample of Sectional Streamlines is the near wake:
top to bottom: raw data, frequency filter, wavelet filter



Reference "probe" is on ML axis



On a besoin d'outils pour trier ...

Approches stochastiques





2) Bases de la POD

25



Les approches conditionnelles sont basées sur des notions intuitives et des *tournevis* :

- On obtient néanmoins des résultats intéressants à partir de ces approches, aussi bien qualitatifs que quantitatifs :

il ne faut pas les négliger

Peut-on être plus objectif?

- En considérant des approches stochastiques ?

Une approche objective se doit d'être basée sur des événements inconditionnels, basée sur les statistiques de l'écoulement : par exemple les **corrélations en 2 points**.

26



Approches stochastiques

Extraire morphologie et dynamique des grosses structures à partir de **corrélations** en deux points

→ 3 outils:

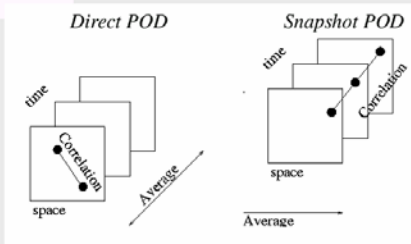
✓ **L.S.E.** $\tilde{u}_i(x, y, z, t) = \sum_{n=1}^{N_p} a_n(x, y, z) P_n(t)$: estimer l'état général de l'écoulement en

fonction de l'état de N_p paramètres $a_n(x, y, z) \langle P_n(t) P_m(t) \rangle = \langle u_i(x, y, z, t) P_m(t) \rangle$

✓ **P.O.D** $u_i(x, y, z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \Phi_i^{(n)}(x, y, z)$: décomposer les champs sur une base

de fonctions propres intrinsèques.

$$\int_D R_{ij}(\underline{X}, \underline{X}') \Phi_j(\underline{X}') d\underline{X}' = \lambda \Phi_i(\underline{X})$$



✓ Modélisation d'ordre bas :

Projeter (Galerkin) les équations gouvernant l'écoulement sur la base POD, conduit à un système E.D.O., polynomial, d'ordre bas (convergence POD) du type :

$$\frac{da_n}{dt} = f(a_i)_{26}$$



Contexte de la POD

Définir une description *minimale, optimale* de l'écoulement?

- pour son organisation (au sens des grandes structures)
- pour la description de l'énergie de la turbulence
- pour décrire sa dynamique à grande échelle

C'est ce que fait la POD

- Basée sur l'utilisation de matrice de covariance (corrélations en 2 points)
- Elle est optimale au sens que par construction : elle permet de reconstruire le maximum d'énergie à partir d'une minimum de *modes*

Elle permet d'obtenir une base de fonctions propres

- intrinsèques de l'écoulement (les vecteurs propres de la matrice de covariance)
- sur lesquelles, les équations régissant l'écoulement peuvent être projetées.



Préambule : la POD ce n'est pas – c'est

- **La POD Ce n'est pas :**
 - **Nouveau** (Lumley 1967)
 - **La seule dénomination** (POD, Karhunen-Loeve, Analyse en composantes principales, fonctions orthogonales empiriques, SVD,...)
 - **Une théorie de la turbulence**
 - **Une méthode de fermeture**
 - **Toujours simple à mettre en œuvre** (spécialement pour des configurations 3D)
 - **Simple à extrapoler** : variations de la configuration fluide (géométrie, Nbre de Reynolds,..)

29

• La POD c'est :



- + **Plus une méthode qu'une théorie** == un outil d'analyse à mettre au même niveau que Fourier, Ondelettes
- + **Une décomposition** : sur une base de fonctions propres (directions propres du tenseur de corrélation)
- + **intuitivement, la POD doit être efficace** car intrinsèque de l'écoulement (par opposition à une décomposition sur une base donnée a priori (Fourier, Chebyshev,...)
- + **Fonctions propres** → directions privilégiées des réalisations de l'écoulement
- + **Orthogonalité** : les différents modes obtenus sont indépendants entre-eux et non corrélés.
- + **Objectif et rigoureux** : (pas de tournevis)
- + **Séparable** : peut être appliqué à une seule direction de l'écoulement

30



+ **Efficace** : optimalité → convergence rapide pour la plupart des configurations

- o Plus une direction est inhomogène plus la POD est efficace
- o Dans le cas d'une direction homogène la POD dégénère en décomposition Fourier
- o La POD est un complément aux décompositions harmoniques

- **intrinsèque** → robustesse des fonctions propres ?

- **limité à des corrélations en 2 points** → prise en compte des moments d'ordre supérieur ?



2.1) Introduction à la POD



La POD en une équation

- + Essayer de trouver une base de fonctions orthogonales telles que:

$$u_i(x, y, z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \underline{a_n(t)} \underline{\Phi_i^{(n)}(x, y, z)}$$

Coefficients porteurs de la dynamique

Fonctions propres intrinsèques de l'écoulement

Modélisation d'ordre bas

Analyse des structures

- + la POD soulève un problème de séparabilité (espace-temps)

33



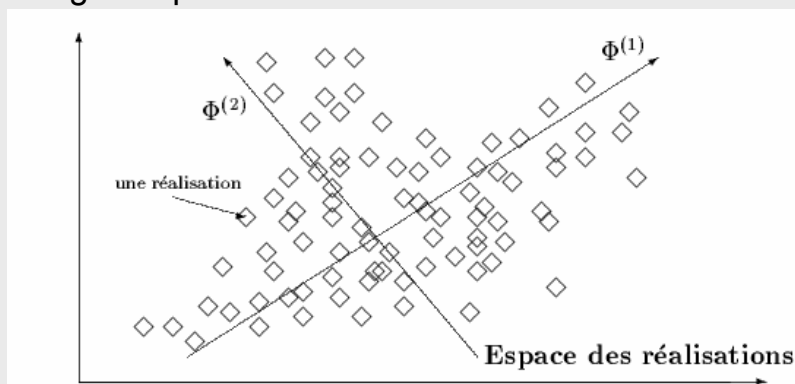
- + Lumley (1967)

+ Une « structure » $\Phi(\underline{X})$ est la réalisation de l'écoulement qui possède la projection maximale (au sens des moindres carrés) sur le champ de vitesse $\underline{u}(\underline{X})$ aléatoire. $\Phi(\underline{X})$ est déterministe

+ c-a-d rechercher $\Phi(\underline{X})$ maximisant $\overline{|u \cdot \Phi|^2} = \overline{|\alpha|^2}$

où le produit scalaire (norme) reste à définir et dépend du problème abordé

- + Une image simple:



... 34

2.1) ... Introduction à la POD



- + Ce concept conduit à un problème aux valeurs propres (Fredholm)

$$\int_D R_{ij}(\underline{X}, \underline{X}') \Phi_j(\underline{X}') d\underline{X}' = \lambda \Phi_i(\underline{X})$$

- + sommation implicite sur j

- + R_{ij} tenseur de corrélations en deux points

$$R_{ij}(\underline{X}, \underline{X}') = \langle u_i(\underline{X}) u_j(\underline{X}') \rangle \quad \text{obtenu à partir d'une moyenne d'ensemble}$$

- + $d\underline{X}'$ ce tenseur doit être connu sur l'ensemble du domaine

→ **Grand volume de données à considérer**

35

2.1) ... Introduction à la POD



Poser un problème POD revient à :

- + **Définir un espace** L2, H1, etc... dans lequel on se place

- + **Définir un produit scalaire** : $\int_D d\underline{X}' : (u, \phi) = \text{somme}(u \cdot \phi)$

- + une intégrale d'espace : POD classique

- + une intégrale temporelle : Snapshot POD

- + une somme sur des échantillons : Snapshot POD

- + **Définir une moyenne d'ensemble** : $\langle u \rangle = \text{moyenne}(u)$

- + une intégrale d'espace : Snapshot POD

- + une intégrale temporelle : POD classique

- + une somme sur des échantillons : POD classique

- + une somme conditionnelle : Snapshot POD

- + Ces sommes et moyennes pouvant être pondérées...

36



Fredholm integral problem*

* Des maths ... optionnel

37

2.1) ... Introduction à la POD



On se place ici dans le cadre d'une POD classique

- + Toutes les propriétés exposées ici, dans le cadre de la POD classique, trouvent leur pendant quelque soit l'approche considérée.
- + NOTE : les champs considérés peuvent être complexes :
 - + la propriété de symétrie du tenseur des corrélations devient une propriété d'Hermitianité
 - + rien n'est changé au niveau de l'approche et des résultats
 - + (sauf ajouter des complexes conjugués aux équations de temps en temps...)

38



Fredholm Integral

- **Problem:** Find $\underline{\Phi}(\underline{X})$ vectorial field $\in C^3$ whose components Φ_i are complex functions of \underline{X} , $\underline{X} \in R^3 \times R^+$

- Physical space $\underline{U}(\underline{X}) \in L^2$ (finite energy)

- \implies Hilbert-Schmidt Theory:

A scalar product is defined as:

$$(\underline{U}, \underline{\Phi}) = \int \underline{U}(\underline{X}) \underline{\Phi}^*(\underline{X}) d\underline{X}$$

$$(\underline{U}, \underline{\Phi}) = \sum_{i=1}^{N_c} \int u_i(\underline{X}) \Phi_i^*(\underline{X}) d\underline{X}$$

...

39



...

$(\underline{U}, \underline{\Phi}) \in C$. A norm is defined as:

$$J(\underline{\Phi}) = \sqrt{\langle \underline{\Phi}, \underline{\Phi}^* \rangle} \in R^+$$

- Averaging $J : \bar{J}(\langle \underline{U}, \underline{\Phi} \rangle) = \langle J(\langle \underline{U}, \underline{\Phi} \rangle) \rangle$ function of Φ only

– $\langle \rangle$ and \int can be permuted

– Φ deterministic hence independent of $\langle \rangle$

- Then:

$$\bar{J}(\underline{\Phi}) = \sum_{i=1}^{N_c} \sum_{j=1}^{N_c} \int \langle u_i(\underline{X}) u_j(\underline{X}') \rangle \Phi_i^*(\underline{X}) \Phi_j(\underline{X}') d\underline{X} d\underline{X}'$$

The correlation $R_{ij} = \langle u_i(\underline{X}) u_j(\underline{X}') \rangle$ is introduced

- The property: $(U, \Phi)^* = (U^*, \Phi^*)$ leads to:

$$\bar{J}(\underline{\Phi}) = \sum_{i=1}^{N_c} \left(\left[\sum_{j=1}^{N_c} \int R_{ij}(\underline{X}, \underline{X}') \Phi_j(\underline{X}') d\underline{X}' \right], \Phi_i(\underline{X}) \right)$$

... 40



...

- An Hermitian operator can be defined A :

$$A.\Phi_i = \sum_{j=1}^{N_c} \int R_{ij}(\underline{X}, \underline{X}') \Phi_j(\underline{X}') d\underline{X}'$$

(R_{ij} is the kernel of A)

- $\bar{J}(\underline{\Phi})$ can be written as:

$$\bar{J}(\underline{\Phi}) = \sum_{j=1}^{N_c} (A.\Phi_j, \Phi_j)$$

- A new problem is defined:
find $\underline{\Phi}$ “parallel” to \underline{U} maximizing $\bar{J}(\underline{\Phi})$ under the constraint $\bar{J}(\underline{\Phi}) = 1$ (for the magnitude).

...

41



...

- The problem can be written:

Find λ Lagrange multiplier
so that Φ maximize $\bar{J}(\underline{\Phi}) - \lambda . (\Phi, \Phi)$

- remains to solve: $A.\Phi_i = \lambda \Phi_i$
- POD problem can then be written as : (Fredholm integral)

$$\sum_{j=1}^{rank} \int R_{ij}(\underline{X}, \underline{X}') \Phi_j(\underline{X}') d\underline{X}' = \lambda \Phi_i(\underline{X})$$

Another mathematical approach can be done by variational calculus.

42



2.2) Le Théorème de la POD

43

2.2) ... Le théorème de la POD



- + R_{ij} est symétrique, défini positif, intégrale finie
- + on peut appliquer la théorie de Hilbert-Schmidt
- + on montre qu'il existe un ensemble **discret** de solutions

$$\sum_{j=1}^{N_c} \int R_{ij}(\underline{X}, \underline{X}') \Phi_j^{(n)}(\underline{X}') d\underline{X}' = \lambda^{(n)} \Phi_i^{(n)}(\underline{X})$$

Avec

- λ valeur propre
- n ordre du mode
- Φ fonction (ou vecteur) propre

...

44

2.2) ... Le théorème de la POD



+ On choisit d'introduire des fonctions propres orthonormales :

$$\int \Phi_i^{(p)}(\underline{X}) \Phi_i^{(q)}(\underline{X}) d\underline{X} = \delta_{pq}$$

+ toute réalisation $\{u_i(\underline{X})\}$ peut être décrite à partir d'une décomposition en série sur la base des fonctions propres $\Phi_i^{(n)}$

$$u_i(\underline{X}) = \sum_n a_n \Phi_i^{(n)}(\underline{X})$$

+ où : $u_i(\underline{X})$ est aléatoire

+ où : $\Phi_i^{(n)}(\underline{X})$ est déterministe

+ Le caractère aléatoire est porté par les coefficients de projection du produit scalaire:

$$a_n = \int u_i(\underline{X}) \Phi_i^{*(n)}(\underline{X}) d\underline{X}$$

... 45

2.2) ... Le théorème de la POD



+ Cette série converge au sens des moindres carrés et les coefficients a_n sont non corrélés : $\langle a_n a_m \rangle = \delta_{nm} \lambda^{(n)}$

Pour cette décomposition: $\Phi_i^{(n)}$ est la « direction » ; a_n^2 et $\lambda^{(n)}$ « l'énergie »

+ Les valeurs propres sont positives: $\lambda^{(n)} \geq 0$ à somme finie: $\sum_n \lambda^{(n)} < \infty$

+ Elles sont triées : $\lambda^{(1)} > \lambda^{(2)} > \lambda^{(3)} > \dots > \lambda^{(n)}$

+ Le noyau R_{ij} peut être exprimé en double série:

$$R_{ij}(\underline{X}, \underline{X}') = \sum_n \lambda^{(n)} \Phi_i^{(n)}(\underline{X}) \Phi_j^{*(n)}(\underline{X}')$$

+ La POD extrait le mode le plus énergétique (1) puis du résidu extrait à nouveau le mode le plus énergétique ; ainsi de suite



2.3) Propriétés de la POD

47

2.3) ... propriétés de la POD



2.3.a) POD et degré d'organisation

- + Représentativité du 1er mode: nbre de modes significatifs $N_s \sim \sum_{n=1}^{N_{pod}} \lambda^{(n)} / \lambda^{(1)}$
- + D_{KL} dimension de K-L nombre minimal de modes tels que

$$\sum_{n=1}^{D_{KL}} \lambda^{(n)} / \sum_{n=1}^{N_{pod}} \lambda^{(n)} \geq 0.99$$

- + Inhomogénéité :

- + très inhomogène → un seul mode significatif : $N_s = D_{KL} = 1$

- + très homogène → tous les modes équiprobables : $N_s = D_{KL} = N_{pod}$

- + ENTROPIE : $S = -\frac{1}{\log N} \sum_{k=1}^N p_k \log p_k$ avec $p_k = \lambda^{(k)} / \sum_{i=1}^N \lambda^{(i)}$

- + si un seul mode significatif : $S = 0$ très organisé

- + si tous les modes équiprobables : $S = 1$ très peu organisé

48

2.3) ... propriétés de la POD



2.3.b) opérateurs linéaires

La POD est un opérateur linéaire

- + mais aucune hypothèse sur la linéarité du processus analysé
- + on considère uniquement des moments d'ordre 2 (mais pas d'hypothèse sur la nature statistique du processus)
- + caractère optimal: c'est la **meilleure décomposition** linéaire au point de vue énergétique
 - convergence la plus rapide
- + Les fonctions propres vérifient individuellement toutes les propriétés...
 - + de type linéaire que l'écoulement peut posséder (par exemple faisant intervenir des opérateurs dérivée partielle : *équation de la continuité*,...)
 - + les mêmes tendances (si les champs tendent vers zéro, les fonctions propres tendent vers zéro,...)

$$\text{if } u = \sum a_n \Phi^{(n)} \text{ then } \Phi^i = \sum b_n \{u\}_n \text{ with } b \equiv a^{-1}$$

49

2.3) ... propriétés de la POD



2.3.b) ... opérateurs linéaires

- + L'ensemble de ces propriétés font de la POD un bon candidat pour des approches *d'ordre bas*.
 - + en particulier la dynamique de l'écoulement pourra, si la convergence est rapide, être décrite à partir d'un nombre réduit de modes
 - + les modes POD peuvent être utilisés pour conduire des projections de Galerkin (POD-Galerkin procedure) :
 - modèles dynamiques d'ordre bas de systèmes complexes
 - + ROM: Reduced Order Models,
 - + LODS: Low Order Dynamical Systems
- applications: contrôle, études paramétriques à moindre coût,...

50



2.4) POD & Fourier

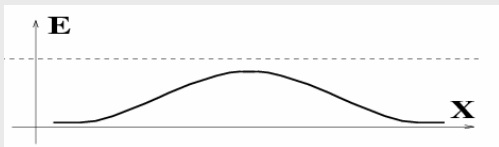
2.4) POD et Fourier



2.4.a) POD & directions d'homogénéité/stationnarité/périodicité

+ Pour pouvoir appliquer la POD, un domaine d'énergie finie doit être défini

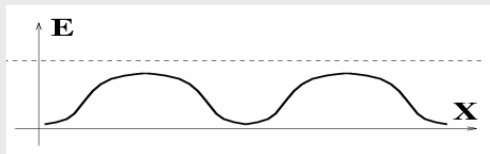
+ Pour une direction inhomogène : $N_s \sim 10 \rightarrow$ POD



+ Pour une direction homogène ou stationnaire : $N_s \sim \infty$



+ Pour une direction périodique : $N_s \sim \infty$



} \rightarrow Fourier

2.4) POD et Fourier



2.4.b) POD & décomposition harmonique

+ Supposons l'existence d'une direction homogène OX_3

alors $R_{ij}(x_1, x'_1, x_2, x'_2, x_3, x'_3, t, t') = R_{ij}(x_1, x'_1, x_2, x'_2, t, t'; r_3)$

où : $r_3 = x'_3 - x_3$

+ On décompose $\vec{X} = (x_1, x_2, x_3, t)$ en

+ une contribution homogène : $x_3,$

+ une contribution inhomogène : $\vec{\chi} = (x_1, x_2, t)$

+ L'équation intégrale de Fredholm s'écrit alors :

$$\sum_{j=1}^{n_c} \int_{\mathcal{D}'} \int_{-\infty}^{+\infty} R_{ij}(\vec{\chi}, \vec{\chi}'; x_3 - x'_3) \Phi_j(\vec{\chi}', x'_3) d\vec{\chi}' dx'_3 = \lambda \Phi_i(\vec{\chi}; x_3)$$

...

53

2.4) POD et Fourier



... 2.4.b) POD & décomposition harmonique

+ On introduit la décomposition en série de Fourier de Φ_l selon OX_3

$$\Phi_l(\vec{\chi}; r_3) = \sum_{k_3=-\infty}^{+\infty} \hat{\Phi}_l(\vec{\chi}; k_3) \cdot \exp(2\pi j k_3 r_3)$$

+ l'interspectre Ψ_{ij} transformée de Fourier du tenseur de corrélations

$$\Psi_{ij}(\vec{\chi}, \vec{\chi}'; k_3) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{ij}(\vec{\chi}, \vec{\chi}'; r_3) \exp(-2\pi j k_3 r_3) dr_3$$

+ L'équation intégrale de Fredholm s'écrit alors :

$$\sum_{j=1}^{n_c} \int_{\mathcal{D}'} \Psi_{ij}(\vec{\chi}, \vec{\chi}'; k_3) \hat{\Phi}_j(\vec{\chi}', k_3) d\vec{\chi}' = \lambda(k_3) \hat{\Phi}_i(\vec{\chi}; k_3)$$

+ On a à résoudre un problème POD **indépendamment par nombre d'onde**

$$\sum_{j=1}^{n_c} \int_{\mathcal{D}'} \Psi_{ij}(\vec{\chi}, \vec{\chi}') \hat{\Phi}_j(\vec{\chi}') d\vec{\chi}' = \lambda \hat{\Phi}_i(\chi) \quad \forall k_3$$

54

2.4) POD et Fourier



2.4.c) Conséquences

- + Dans de telles directions les fonctions harmoniques sont solution du problème POD

→ **La POD peut être vue comme une généralisation des approches harmoniques à des directions inhomogènes**

- + La *phase est perdue*, dans la direction pour laquelle l'analyse de Fourier est menée :

si $\hat{\Phi}_i(\vec{\chi}; k_3)$ est solution du problème POD toute solution de la forme $\hat{\Phi}_i(\vec{\chi}; k_3) \exp[j\theta(k_3)]$ l'est...

- + La *phase est conservée*, dans la direction de l'analyse POD
- + la décomposition sur la base POD s'écrit

$$u_i(\vec{\chi}; r_3) = \sum_n \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{a}^{(n)}(k_3) \hat{\Phi}_i^{(n)}(\vec{\chi}; k_3) \exp(2\pi j k_3 r_3) dk_3$$

avec:

$$\hat{a}^{(n)}(k_3) = \int_{\mathcal{D}'} \hat{u}_i(\vec{\chi}; k_3) \hat{\Phi}_i^{(n)*}(\vec{\chi}; k_3) d\vec{\chi}$$

55

2.4) POD et Fourier



2.4.d) Exemple

- + pour écoulement stationnaire : t direction « homogène »

→ Transformée de Fourier dans la direction temporelle

$$\sum_j \int \Psi_{ij}(\underline{X}, \underline{X}'; f) \Phi_j^{(n)}(\underline{X}; f) d\underline{X}' = \lambda^{(n)}(f) \cdot \Phi_i^{(n)}(\underline{X}; f)$$

- + $\underline{X} = (x_1, x_2, x_3)$

- + Ψ_{ij} interspectre

- + λ dépend de la fréquence f

- + Φ connu uniquement dans le domaine spectral

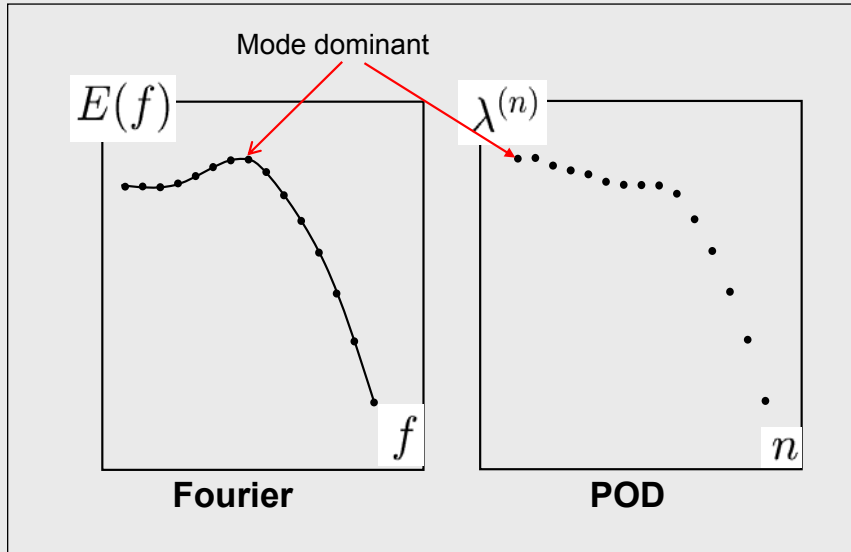
→ description non locale dans le domaine physique

56



2.4.e) Spectre de valeurs propres

- + Fourier : spectre continu ... trié par fréquence
- + POD : spectre discret ... trié par énergie décroissante
- + Les modes POD les plus élevés ont tendance à se comporter comme des modes harmoniques



57

2.5) Considérations pratiques



58

2.5) Considérations pratiques sur la mise en œuvre de la POD



+ On traite des données discrètes, sur un domaine fini

→ Intégrales → sommes pondérées

$$\int f(\underline{X}) d\underline{X} \rightarrow \sum_{I=1}^{N_X} W(I) f(\underline{X}_I)$$

+ Où $W(I)$ traduit la règle d'intégration :

par exemple trapèzes → $[H/2, H, H, \dots, H, H/2]$

+ Le pas d'intégration peut ne pas être constant

+ Conséquences:

+ La taille du problème POD est : $N_{POD} = N_X \times N_c$

... 59

2.5) Considérations pratiques sur la mise en œuvre de la POD



+ le problème POD effectivement traité diffère du problème initial:

$$\sum_{I=1}^{N_X} \Psi_{ij}(\underline{X}_I, \underline{X}_J) W(J) \Phi_i(\underline{X}_J) = \lambda \Phi_j(\underline{X}_I) \implies \Psi_{ij}(\underline{X}_I, \underline{X}_J) W(J) \text{ non symétrique}$$

+ toutefois on peut montrer que $\sqrt{W(I)} \Psi_{ij}(\underline{X}_I, \underline{X}_J) \sqrt{W(J)}$

+ est symétrique

+ a les mêmes valeurs propres que $\Psi_{ij}(\underline{X}_I, \underline{X}_J)$

+ les vecteurs propres sont pondérés par $\sqrt{W(I)}$

+ Le problème discret à résoudre est alors :

$$\sum_{I=1}^{N_X} \sqrt{W(I)} \Psi_{ij}(\underline{X}_I, \underline{X}_J) \sqrt{W(J)} \Phi_i(\underline{X}_J) = \lambda \Phi_j(\underline{X}_I)$$

+ En termes de matrice : calculer les valeurs propres d'une matrice hermitienne

$$A_{LM} V_M^{(n)} = \Lambda^{(n)} V_L^{(n)}$$

... 60

2.5) Considérations pratiques sur la mise en œuvre de la POD



+ Matrix A_{LM} is built from $N_c \times N_c$ blocks of size $N_{\underline{X}} \times N_{\underline{X}}$

$$A_{LM} = \begin{bmatrix} \begin{matrix} 1 & \rightarrow & L & \rightarrow & N_c \times N_{\underline{X}} \\ \begin{bmatrix} 1 \rightarrow R \rightarrow N_{\underline{X}} \\ \downarrow \\ S & B_{11_{RS}} \\ \downarrow \\ N_{\underline{X}} \end{bmatrix} & & \begin{bmatrix} 1 \rightarrow R \rightarrow N_{\underline{X}} \\ \downarrow \\ S & B_{12_{RS}} \\ \downarrow \\ N_{\underline{X}} \end{bmatrix} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \begin{bmatrix} 1 \rightarrow R \rightarrow N_{\underline{X}} \\ \downarrow \\ S & B_{21_{RS}} \\ \downarrow \\ N_{\underline{X}} \end{bmatrix} & & \begin{bmatrix} 1 \rightarrow R \rightarrow N_{\underline{X}} \\ \downarrow \\ S & B_{22_{RS}} \\ \downarrow \\ N_{\underline{X}} \end{bmatrix} \end{matrix} \end{bmatrix}$$

with $B_{ij_{RS}} = \sqrt{W(\underline{X}_R)}\sqrt{W(\underline{X}_S)}\Psi_{ij}(\underline{X}_R, \underline{X}_S)$.

61

2.5) Considérations pratiques sur la mise en œuvre de la POD



+ Bibliothèques scientifiques:

- LAPACK: <http://www.netlib.org/lapack/>
- ARPACK: <http://www.caam.rice.edu/software/ARPACK>



(pour les problèmes de grande taille)

62



3) Variantes de la POD

63

3) Variantes de la POD



- + Elles dépendent :
 - + Du type de données
 - + Du produit scalaire, et de l'espace considéré
 - + Du type de moyenne
 - + De la variable utilisée

64

3) Variantes de la POD



3.1) Quelques exemples de produit scalaire

rappel : $L^2(\Omega)$ espace des fonctions à carré sommable

- + Dans L^2 (le plus fréquent → espace *naturel* en méca-flu.) :

$$(\vec{u}, \vec{v})_{L^2} = \int_{\Omega} (u_1 v_1^* + u_2 v_2^* + u_3 v_3^*) d\vec{x} \quad \|\vec{u}\|^2 = (\vec{u}, \vec{u})$$

- + Dans H^1 (espace de Sobolev) [Iollo et al. 2000]

$$H^1(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) : \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega) \right\}$$

$$(\vec{u}, \vec{v})_{H^1} = (\vec{u}, \vec{v})_{L^2} + \epsilon \int_{\Omega} (\vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v) d\vec{x}$$

ϵ est un paramètre (plus il est grand plus on considère les petites échelles)

- + Pour approches aéroacoustiques [Rowley et al. 2001] $\vec{q} = (u, v, a)$

$$(\vec{q}_1, \vec{q}_2)_{\epsilon} = \int_{\Omega} \left(u_1 u_2 + v_1 v_2 + \frac{2\epsilon}{\gamma(\gamma - 1)} a_1 a_2 \right) d\vec{x}$$

▷ if $\epsilon = \gamma$ then $\|\vec{q}\|^2 = 2h_0$ twice the total enthalpy of the flow,

▷ if $\epsilon = 1$ then $\|\vec{q}\|^2$ gives twice the total energy of the flow.

65

3) Variantes de la POD



3.2) Les deux POD les plus fréquentes

POD	Auteur	Moyenne	Noyau
Classique ou Directe	Lumley 1967	Ensemble ou temporelle	spatial
Snapshot POD	Sirovich 1985	spatiale	Temporel ou Ensemble

- + **POD classique** : pour des applications concernant des grandes durées ou un grand nombre d'échantillons (mesures fils chauds, microphones,...)
- + **Snapshot POD** : description spatiale dense (PIV, simulations,...)
- + On choisit l'une ou l'autre de manière à *avoir la taille du problème minimale*

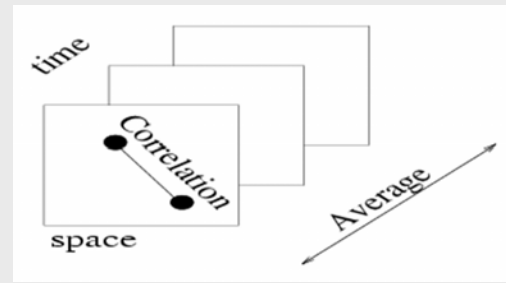
On considère ici un problème discret comportant M réalisations de N_c composantes portant sur la variable \underline{X} décrite sur un maillage de N points

3) Variantes de la POD

3.2) Les deux POD les plus fréquentes



3.2.a) La POD Classique



+ Moyenne : $1/T \int dt$

+ Noyau : $R_{ij}(\underline{X}, \underline{X}') = \frac{1}{T} \int_T u_i(\underline{X}) u_j(\underline{X}') dt = \sum_{n=1}^{N_{POD}} \lambda^{(n)} \Phi_i^{(n)}(\underline{X}) \Phi_j^{(n)}(\underline{X}')$

+ Problème POD : $\sum_{j=1}^{N_c} \int R_{ij}(\underline{X}, \underline{X}') \Phi_j^{(n)}(\underline{X}') d\underline{X}' = \lambda^{(n)} \Phi_i^{(n)}(\underline{X}) \Rightarrow \Phi_i^{(n)}(\underline{X})$

+ Projection : $a_n(t) = \int_{\mathcal{D}} u_i(\underline{X}, t) \Phi^{(n)}(\underline{X}) d\underline{X}$

+ Taille du problème : $N \times N_c$

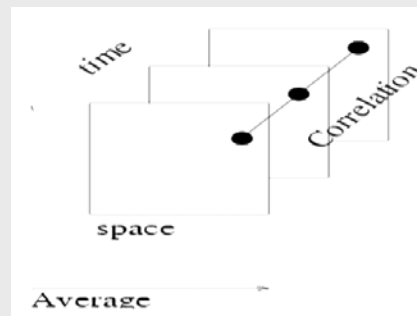
67

3) Variantes de la POD

3.2) Les deux POD les plus fréquentes



3.2.b) La Snapshot POD



+ Moyenne : spatiale

+ Noyau : $C(t, t') = \frac{1}{T} \int u_i(\underline{X}, t) u_i(\underline{X}, t') d\underline{X} = \frac{1}{T} \sum_{n=1}^{N_{POD}} a^{(n)}(t) a^{(n)}(t')$

+ Problème POD : $\int_T C(t, t') a^{(n)}(t') dt' = \lambda^{(n)} a^{(n)}(t) \Rightarrow a^{(n)}(t)$

+ Vecteurs propres spatiaux : $\Phi^{(n)}(\underline{X}) = \frac{1}{T} \frac{1}{\lambda^{(n)}} \int_T u_i(\underline{X}, t) a^{(n)}(t) dt$

+ Taille du problème : $M \Rightarrow$ intéressant si $N \gg M$

68

3.2) Les deux POD les plus fréquentes



3.2.c) Propriétés communes aux deux approches

- + Toute réalisation $U_i(\vec{x}, t)$ peut être développée sur la base des fonctions propres $\Phi_i^{(n)}(\vec{x})$:

$$U_i(\vec{x}, t) = \sum_{n=1}^{N_{POD}} a^{(n)}(t) \Phi_i^{(n)}(\vec{x})$$

- + Les modes spatiaux $\Phi_i^{(n)}(\vec{x})$ sont orthonormaux :

$$\int_{\Omega} \vec{\Phi}^{(n)}(\vec{x}) \cdot \vec{\Phi}^{(m)}(\vec{x}) d\vec{x} = \delta_{nm}$$

- + Les coefficients de projection (ou modes temporels) $a^{(n)}(t)$ sont orthogonaux :

$$\frac{1}{T} \int_T a^{(n)}(t) a^{(m)*}(t) dt = \lambda^{(n)} \delta_{nm}$$

69

3.2) Les deux POD les plus fréquentes



3.2.d) POD et degré de liberté

- + Dans les applications pratiques de la POD :

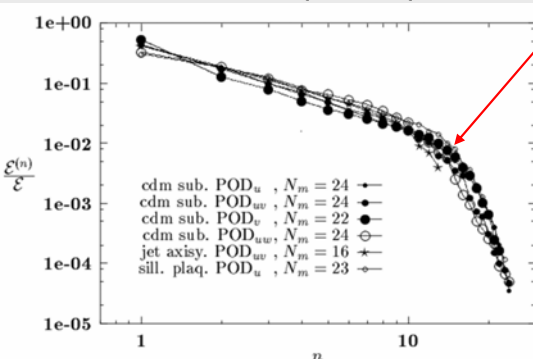
➔ on ne peut pas espérer obtenir plus de modes significatifs que:

$$N_m = \min(N \times N_c, M)$$

Exemple 1 : Appliquer une *POD classique* sur 10000 points à partir d'une collection de 500 échantillons ne conduira au plus qu'à 500 modes significatifs

Exemple 2 : Pendant pour la POD de la notion du *théorème de Shannon* :

Si on applique la POD sur une direction représentée sur N points, on peut s'attendre à ce que uniquement $N/2$ modes soient significatifs.



Mise en évidence de l'*effet Shannon* sur des POD classiques *scalaires* ou *vectérielles* appliquées à différentes configurations d'écoulement .
[Delville 1995]

70



4) A quoi peut servir la POD

71

4) A quoi peut servir la POD



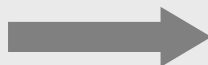
4.1) Extraction d'organisation privilégiée, de « structure »

- + Par son caractère objectif (systématique)
- + Par sa capacité d'extraction d'une représentation optimale

4.1.a) L'exemple du *trombinoscope* (Snapshot POD)

- Les photos du *trombinoscope* d'un campus américain sont décomposées POD par [Sirovich & Kirby 1987]
- Idée : reconnaître quelqu'un est un problème d'ordre bas

Etudiant *moyen*



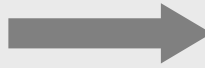
72

4.1) Extraction d'organisation privilégiée, de « structure »

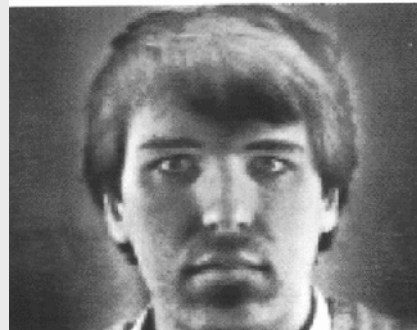
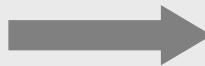


4.1.a) ... exemple du *trombinoscope*

Etudiant Mr X



Caricature globale de Mr X
(Mr X – Etudiant moyen)



Toute l'information est conservée ...
... Pas de réduction

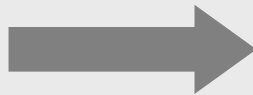
73

4.1) Extraction d'organisation privilégiée, de « structure »



4.1.a) ... exemple du *trombinoscope*

Mr X



Caricatures POD de Mr X à 10, 20, 30 et 40 modes

10



20



30



40



10 modes (10 coefficients) permettent de reconnaître Mr X

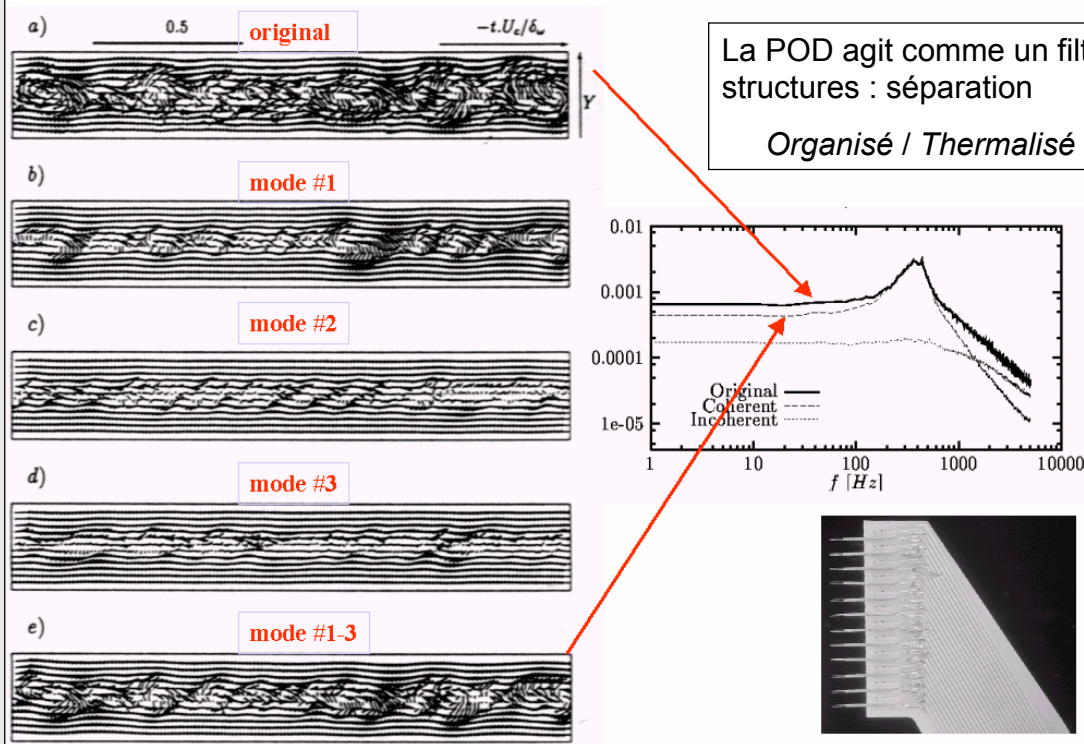
74

4.1) Extraction d'organisation privilégiée, de « structure »



4.1.b) reconstruction instantanée

Couche de mélange plane [LEA]

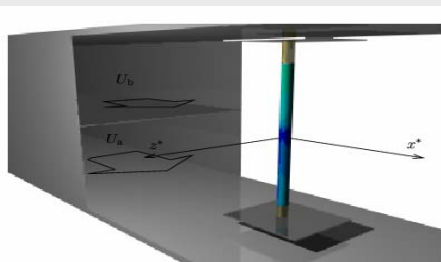


4.1) Extraction d'organisation privilégiée, de « structure »

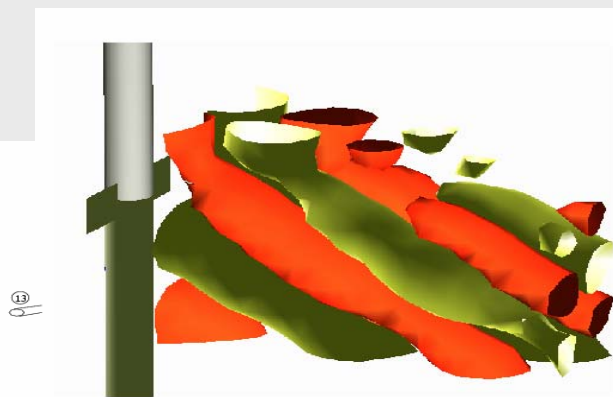
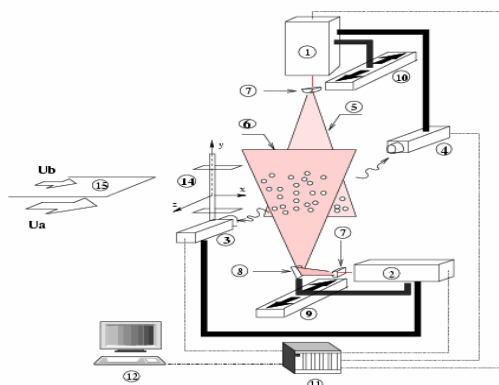


4.1.c) Exemple Interaction sillage – couche de mélange [Braud et al 2002]

+ extraire le mode dominant dans une configuration très 3D (POD Classique)



Approche expérimentale PIV (2 plans)



Met en évidence des effets de dislocation



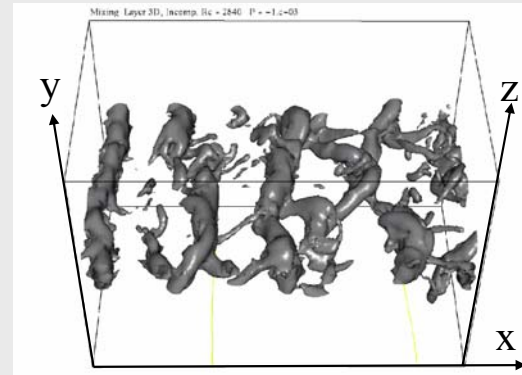
4.2) Compression de données

- + Utiliser la rapidité de convergence de la POD pour ne conserver que quelques modes significatifs

Exemple: archivage d'une simulation aux grandes échelles (LES) d'une couche de mélange turbulente [LIMSI-LEA 1995]

Maillage : $N_x = 401 ; N_y = 71 ; N_z = 55 ; N_x \times N_y \times N_z = 1,6 \cdot 10^6$
 Pas de temps : $N_t = 1000$

Chaque pas de temps on sauve 4 variables: $v_i(\vec{x}, t), i = 1, 2, 3$ et $P(\vec{x}, t)$



- + base de données : 47 G octets
- + à l'époque: nécessité de compresser
- + inhomogénéité dans le plan (x,y) → POD

77

4.2) Compression de données



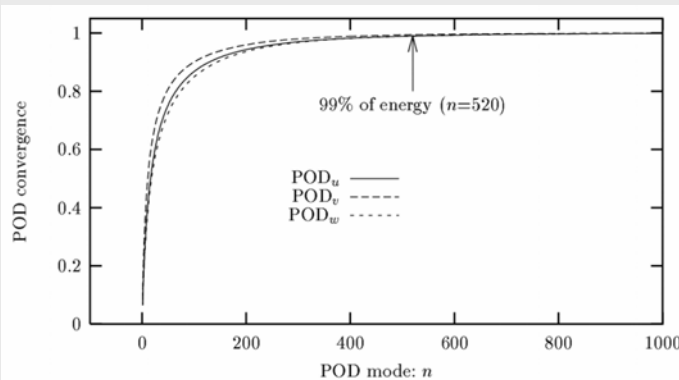
Exemple: archivage d'une (LES) d'une couche de mélange turbulente [LIMSI-LEA 1995]

- + Principe : POD classique scalaire (pour chaque composante individuellement) dans le plan (x,y)

$$\tilde{v}_i(\vec{x}, t) = \sum_{n=1}^{N^{POD}} a_i^{(n)}(z, t) \phi_i^{(n)}(x, y)$$

- + moyennes sur $N_z \times N_t$ plans

- + Très bonne convergence :



- + il y a $N_x \times N_y$ POD modes
- + on en retient $D_{KL} = 520$

- + compression très élevée :

$$N_x \times N_y / D_{KL} = 55 \text{ (2\%)}$$

Taille finale < 1 GO

78

4.3) POD-Galerkin → LODS (réduction de modèle)



→ Systèmes Dynamiques

- **Equations du mouvement** : Navier-Stokes $\partial u_i / \partial t = \text{NS}(u_j)$ problème aux dérivées partielles (EDP): NS contient des opérateurs dérivée spatiale
- **Projection** des équations NS sur la base POD : toutes les dérivées spatiales portent sur les fonctions propres
- **Troncature** de la décomposition : on conserve les **N** premiers modes
- **Système d'Equations Différentielles Ordinaires (EDO)**

$$da_i/dt = f_i(a_1, a_2, \dots, a_N)$$

- f_i sont des fonctions polynomiales au moins quadratiques (interactions non linéaires)

79

4.3) POD-Galerkin → LODS (réduction de modèle)



4.3.a) Procedure Galerkin

- + **But** : déterminer un modèle dynamique d'ordre bas pour les coefficients de projection $a^{(n)}(t)$
- + C'est une méthode générale pour résoudre des EDP : $\mathcal{L}(\vec{u}) = 0$
- + Elle simplifie un problème de dimension infinie en le discrétisant sur une base adéquate de fonctions orthogonales $\{\vec{\varphi}_i\}$

$$\vec{u}(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{\infty} \chi_i \vec{\varphi}_i(\vec{x})$$

- + Le problème est tronqué à une taille finie i_{max}
- + Sur cette base, $\mathcal{L}(\vec{u}) = 0$ se traduit par :

$$\left(\mathcal{L} \left(\sum_{i=1}^{i_{max}} \chi_i \vec{\varphi}_i(\vec{x}) \right), \vec{\varphi}_j \right) = 0 \quad j = 1, \dots, j_{max}$$

80

4.3) POD-Galerkin → LODS (réduction de modèle)



4.3.b) Procédure Galerkin appliquée à la POD

+ La base POD se prête bien à ce genre d'approche :

- + convergence rapide → i_{max} petit
- + c'est une base ...

+ On considère les équations de Navier-Stokes

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = \vec{F}(\vec{u}) \text{ with } \vec{u} = \vec{u}(\vec{x}, t) \quad \vec{x} \in \Omega \text{ and } t \geq 0$$

+ On décompose \vec{u} sur la base POD $\vec{\Phi}^{(m)}$:

$$u_i(\vec{x}, t) = \sum_{m=1}^{N_{POD}} a^{(m)}(t) \Phi_i^{(m)}(\vec{x})$$

+ NS s'écrit :

$$\sum_{m=1}^{N_{POD}} \frac{da^{(m)}(t)}{dt} \Phi_i^{(m)}(\vec{x}) = \vec{F} \left(\sum_{m=1}^{N_{POD}} a^{(m)}(t) \Phi_i^{(m)}(\vec{x}) \right)$$

81

4.3) POD-Galerkin → LODS (réduction de modèle)



4.3.b) Procédure Galerkin appliquée à la POD

+ On considère le produit scalaire de chacune des équations par $\Phi_i^{(n)}(\vec{x})$

+ pour le terme de gauche on a (à cause de l'orthonormalité des modes) :

$$\left(\sum_{m=1}^{N_{POD}} \frac{da^{(m)}(t)}{dt} \Phi_i^{(m)}(\vec{x}), \Phi_i^{(n)}(\vec{x}) \right) = \frac{da^{(n)}(t)}{dt}$$

+ Idem, le terme de droite peut s'écrire (pour le N_{gal} équations retenues) :

$$\frac{da^{(n)}(t)}{dt} = \vec{\mathcal{F}}^{(n)}(a^{(1)}(t), \dots, a^{(n)}(t))$$

$$\text{où : } \vec{\mathcal{F}}^{(n)} = \left(\vec{\Phi}^{(n)}, \vec{F} \left(\sum_{m=1}^{N_{gal}} a^{(m)}(t) \Phi_i^{(m)}(\vec{x}) \right) \right)$$

+ On arrive à : $da_i/dt = f_i(a_1, a_2, \dots, a_N)$

82

4.3) POD-Galerkin → LODS (réduction de modèle)



4.3.b) Procédure Galerkin appliquée à la POD

+ Reste à prendre en compte :

- + Les conditions initiales : elles se déduisent du problème lui-même :

$$a^{(n)}(t = 0) = a_0^{(n)} \text{ with } a_0^{(n)} = (\vec{u}_0(\vec{x}), \vec{\Phi}^{(n)}) = (\vec{u}(\vec{x}, t = 0), \vec{\Phi}^{(n)})$$

- + Les conditions frontières : plus délicates à mettre en œuvre.

Elles peuvent poser des problèmes dans les cas :

- + d'une approche partielle
 - + non prise en compte de la pression
 - + utilisation d'un sous domaine
- + de conditions de Dirichlet non homogènes à la frontière

83

4.3) POD-Galerkin → LODS (réduction de modèle)



4.3.c) Un exemple d'approche POD-Galerkin

(issu de la LES déjà citée §4.2)

- + Pouvoir prédictif du modèle réduit :

→ si le modèle réduit se comporte bien dans les premiers instants, on peut rapidement noter une divergence certaine :

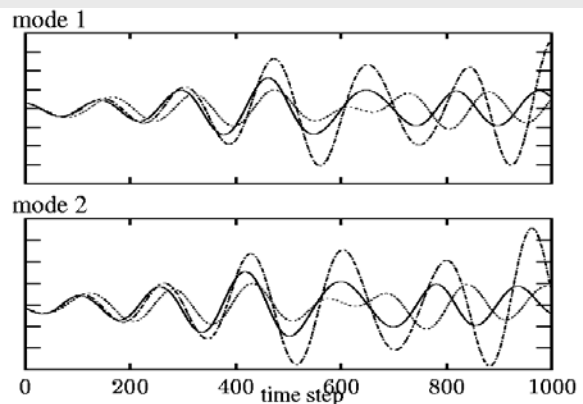


Figure 5: Comparison of the temporal evolution of the first two modes for the snapshot POD — and the LODS for $N_G=10$ - - and $N_G=36$ - - -.

Deux causes possibles :

- + Sensibilité des systèmes dynamiques aux conditions initiales
- + Mauvaise prise en compte des modes, d'ordre supérieur, négligés.

C'est un problème comparable à celui rencontré dans les approches LES.

Ce dernier point fait l'objet d'un domaine d'étude, largement exploré dans la bibliographie. Il reste un des verrous à lever pour la généralisation de ce type d'approche ...



4.3.d) Limitations des approches POD-Galerkin

Limitations	Exemples de réponse
Pouvoir prédictif du modèle réduit	Ajout de modèles dissipatifs, ...
Prise en compte de la pression	Formulation vitesse vorticité, ...
Connaissance <i>a priori</i> des fonctions propres	Modélisation <i>a priori</i> du tenseur de corrélation, ...
Robustesse des fonctions propres En particulier si l'écoulement est modifié par le contrôle	« POD robuste », morphing, Trust-Region POD, ...
Variation des paramètres de l'écoulement Re , ...	Mélange de bases POD Interpolations, ...

- + Il existe tout une série d'autres outils en développement pour pallier ces inconvénients (cf. biblio)

85

4.4) POD et contrôle



4.4.a) Remarques

- + Les coefficients de projection $a^{(n)}(t)$ de la POD peuvent être utiles pour le contrôle, en effet :
 - + Ils fournissent une information instantanée de l'état global du système (sur toute son étendue spatiale)
 - + leur représentativité est, pour un nombre minimal de coefficients, optimale au sens de l'énergie.
 - + Ils donnent une description représentative du comportement dynamique des grosses échelles de l'écoulement
 - + ils peuvent conduire à un modèle d'ordre bas (Galerkin) de la dynamique de l'écoulement. Plusieurs stratégies possibles :
 - + Contrôle par le chaos (comportement asymptotique des coeffs.)
 - + Contrôle en boucle fermée (Modèle de la dynamique à court terme)
- + D'où l'importance de pouvoir les *mesurer* ou les *estimer*

86



4.4) POD et contrôle

4.4.b) Pour accéder aux coefficients $a^{(n)}(t)$:

Rappel : ils sont obtenus par projection de la réalisation instantanée $u_i(\underline{X}, t)$ sur les fonctions propres: $\Phi^{(n)}(\underline{X})$

$$a_n(t) = \int_{\mathcal{D}} u_i(\underline{X}, t) \Phi^{(n)}(\underline{X}) d\underline{X}$$

Il faut connaître $u_i(\underline{X}, t)$!

- + Pour des approches numériques (DNS, LES, ...), où tout est connu : pas de problème (si ce n'est la taille des données)
- + Pour des approches expérimentales ... il faut trouver un moyen d'estimer cette contribution :
 - + Utilisation de multi-capteurs (peignes de sondes) résolus en temps mais de faible résolution spatiale
 - + Utilisation de moyens résolus en espace (PIV) mais de faible résolution temporelle
 - + Pour une résolution à la fois dans les deux domaines, il faut faire appel à une approche complémentaire : l'**Estimation Stochastique**



4.4) POD et contrôle

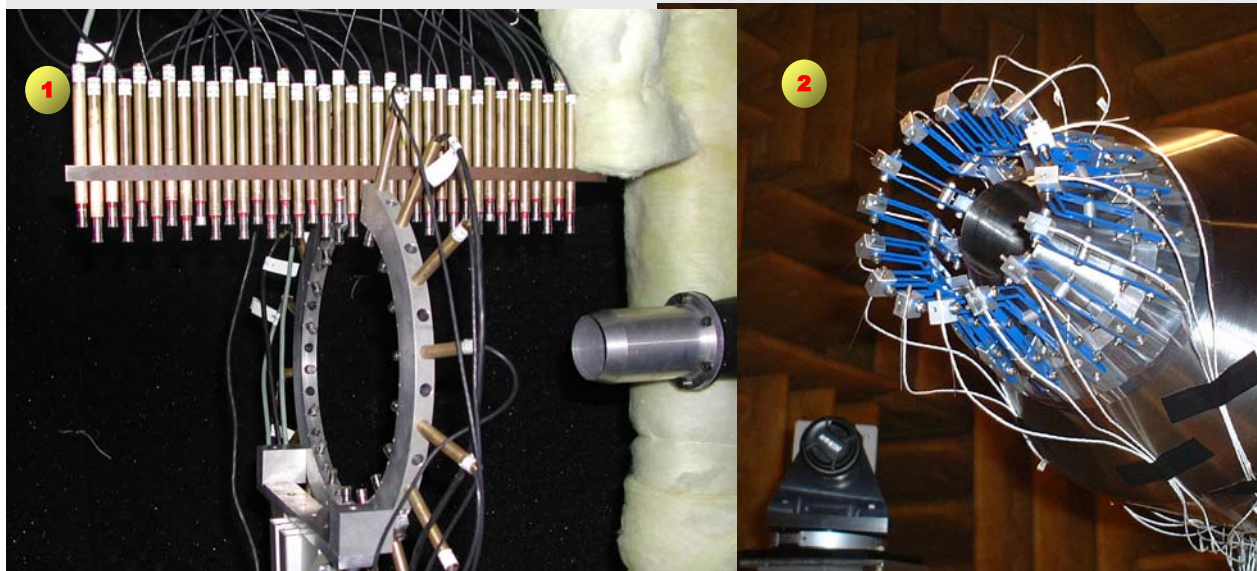
4.4.c) Exemples d'approches multi-capteurs (fils chauds)

	[ref]	Description
1	LEA	48 sondes simples
2	LEA	2 peignes 12 sondes en X
3	LEA	12 sondes 4 fils
4	LEA	11 peignes de 3 sondes X
5	[Ukeiley]	2 peignes 7 sondes en X
6	[Ukeiley]	12+4 sondes X
7	[Gordeyev]	2 peignes 8 sondes X
8	[Citriniti]	138 sondes simples

4.4) POD et contrôle



4.4.c) Exemples d'approches multi-capteurs (microphones)



	[ref]	Description
1	LEA	50 microphones + LDV
2	[Tinney]	16 microphones + LDV

89

4.4) POD et contrôle



4.4.c) Estimation Stochastique

LINEAR STOCHASTIC ESTIMATION L.S.E. [Adrian]

$$\tilde{u}_i(x, y, z, t) = \sum_{n=1}^{N_p} b_n(x, y, z) P_n(t)$$

- + Les coefficients linéaires b_n sont indépendants du temps
- + Ils relient l'état instantané de l'écoulement à celui de N_p paramètres
- + Ils sont solutions du système d'équations :

$$b_n(x, y, z) \langle P_n(t) P_m(t) \rangle = \langle u_i(x, y, z, t) P_m(t) \rangle$$

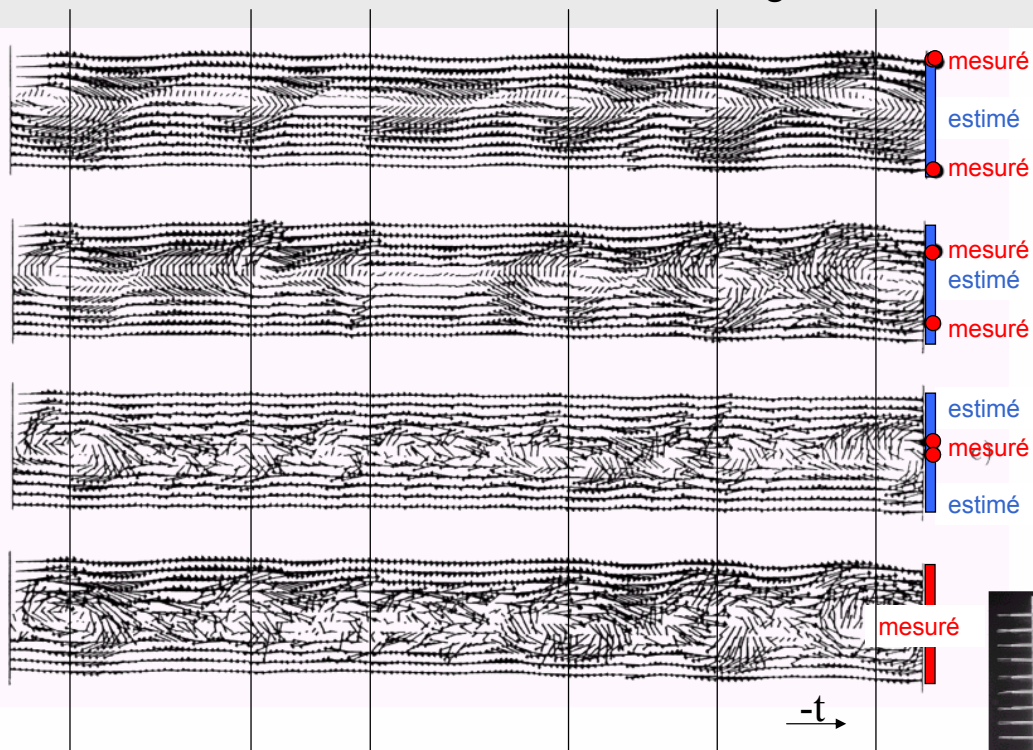
90



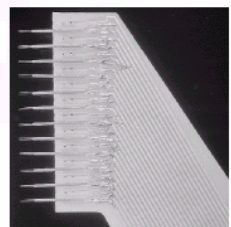
- LSE possible que si une corrélation existe
(en particulier la qualité de l'estimation décroît avec la distance)
- paramètres pas forcément homogènes à l'estimé



LSE dans une couche de mélange turbulente



vitesse → vitesse





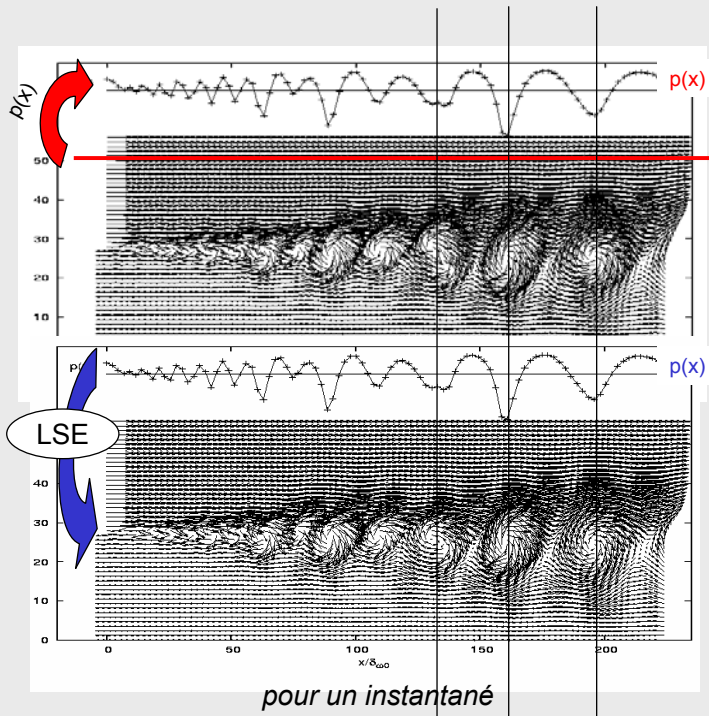
Couplage pression-vitesse : DNS Pression proche+LSE

DNS 2D - CdM plane

□ Champ calculé

L.S.E basée sur $p(x)$

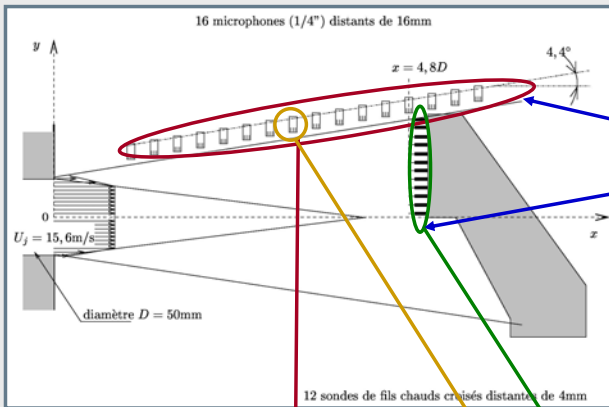
□ Champ estimé



pression → vitesse



Approches aéroacoustiques : couplage pression-vitesse L.S.E

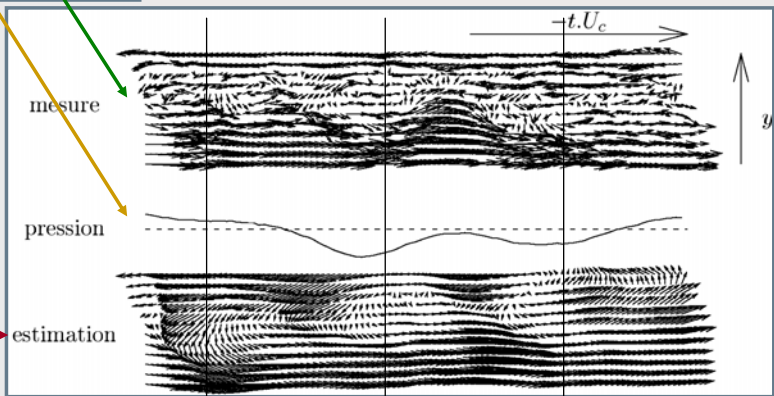


Distributions simultanées

Approche expérimentale

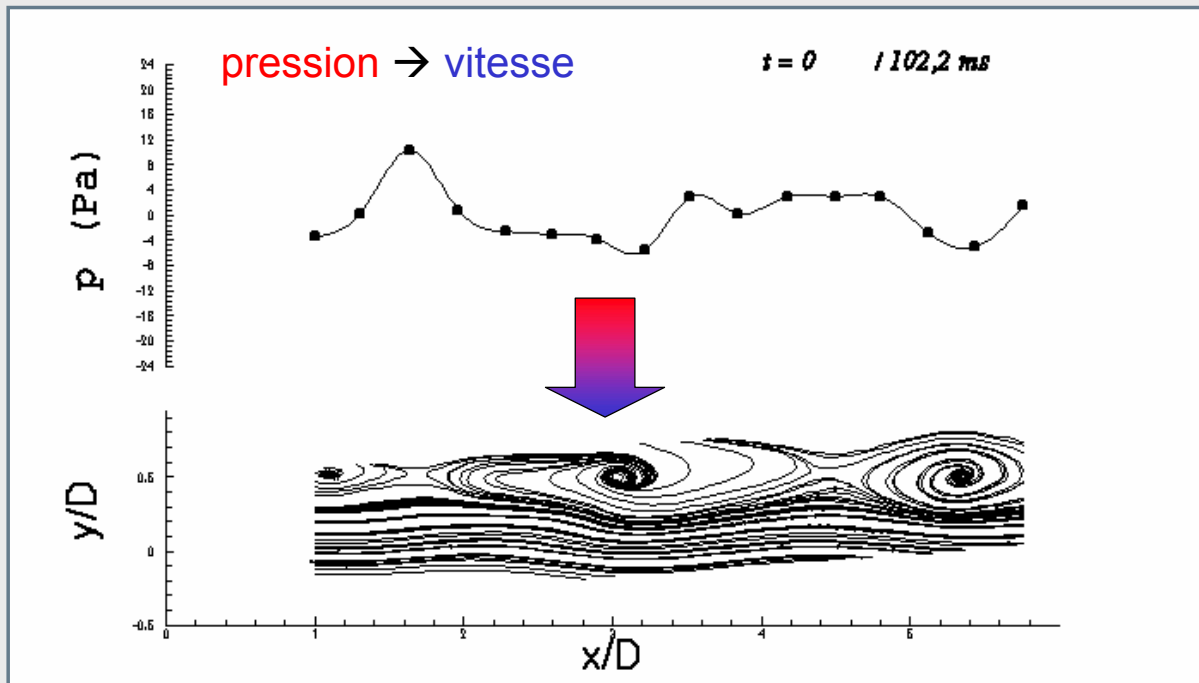
pression → vitesse

LSE





à partir de l'histoire de la distribution de pression, on estime **LSE**, les 'structures' dans la zone de mélange



4.4) POD et contrôle



4.4.d) Méthode complémentaire POD+LSE

+ Pour accéder à une estimation des coefficients $a^{(n)}(t)$:

+ estimation stochastique de $\tilde{u}_i(x, y, z, t)$ à partir de quelques mesures locales

+ $\tilde{a}^{(n)}(t)$ = projection de $\tilde{u}_i(x, y, z, t)$ sur les fonctions propres de la POD

+ **Exemple:** estimation 1er mode POD à partir de 2 sondes dans la CdM

Mesure : signal complet



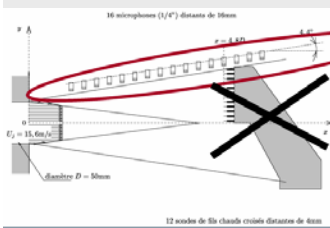
POD : contribution mode 1



POD+SE : estimation mode 1

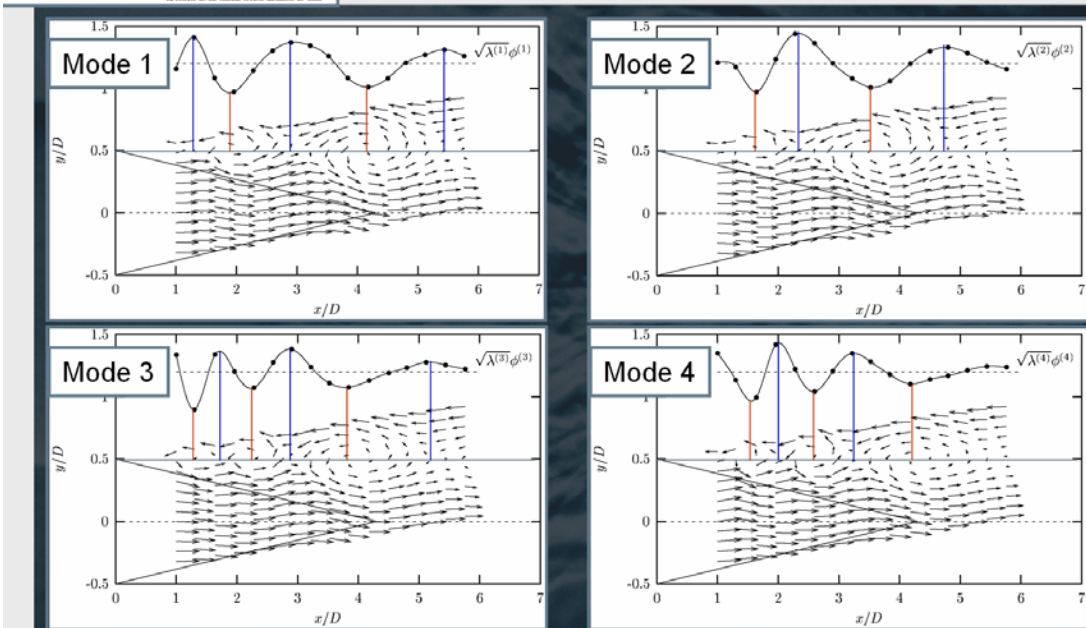


4.4.d) Méthode complémentaire POD+LSE



POD sur pression

mode de **pression** + LSE → mode **vitesse**



4.4.d) Méthode complémentaire POD+LSE



➤ Jet $U_j=100$ ms, $D=50$ mm :

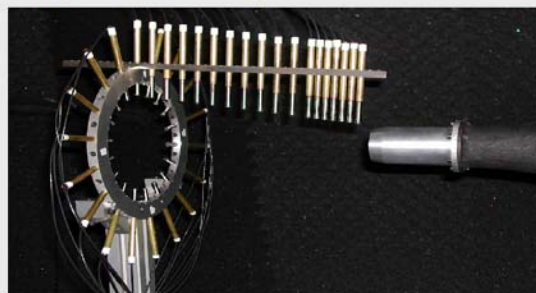
- 18 microphones $x \in [0.5D:5.5D]$
- 18 microphones $\theta \in [0:2\pi]$

➤ **Corrélations**

$$R_{pp}(x, x', d\theta, \tau) = \langle p(x, \theta_i, t) \otimes p^*(x', \theta_i + d\theta, t + dt) \rangle$$

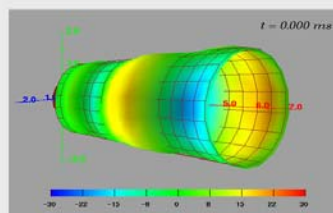
$$\psi_{pp}(x, x', m_\theta, \omega) = \widehat{\widehat{R}}_{pp}(x, x', d\theta, \tau)$$

pression → **pression**

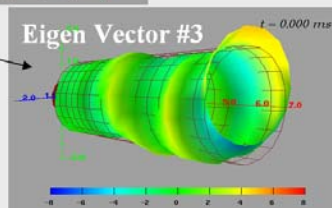
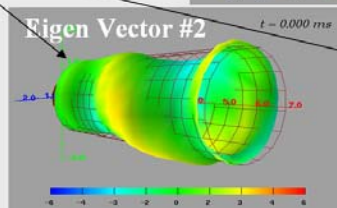
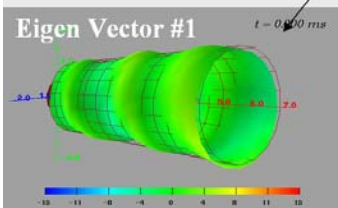


➤ **POD selon x, Fourier θ + LSE** → **contribution. instantanée modes POD connues sur un cône**

Mode azim 0, POD 1 →



Mode azim 1, POD 1, 2, 3





Low Dimensional Tools for Flow-Structure Interaction Problems: Application to Micro Air Vehicles



Ryan Schmit
Department of
Mechanical & Aeronautical
Engineering
Clarkson University
Potsdam, NY 13699

Mark Glauser
Department of
Mechanical, Aerospace &
Manufacturing Engineering
Syracuse University
Syracuse, NY 13244

Susan A. Gorton
NASA Langley Research
Center
Hampton VA, 23681

Funding by NASA GSRP,
Sponsors: Jer-Nan Juang and Lucas Horta

January 7, 2003

41st AIAA Aerospace Science Meeting and Exhibit
Reno, NV



déformation → Vitesse



déformation → Vitesse

modes POD de la vitesse

$$\begin{bmatrix} \overline{\varepsilon_1^2} & \overline{\varepsilon_1 \varepsilon_2} & \cdots & \overline{\varepsilon_1 \varepsilon_q} \\ \overline{\varepsilon_2 \varepsilon_1} & \overline{\varepsilon_2^2} & \cdots & \overline{\varepsilon_2 \varepsilon_q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{\varepsilon_q \varepsilon_1} & \overline{\varepsilon_q \varepsilon_2} & \cdots & \overline{\varepsilon_q^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{n1} \\ A_{n2} \\ \vdots \\ A_{nq} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_n \varepsilon_1 \\ a_n \varepsilon_2 \\ \vdots \\ a_n \varepsilon_q \end{bmatrix}$$

déformation

Estimation des coefficients POD

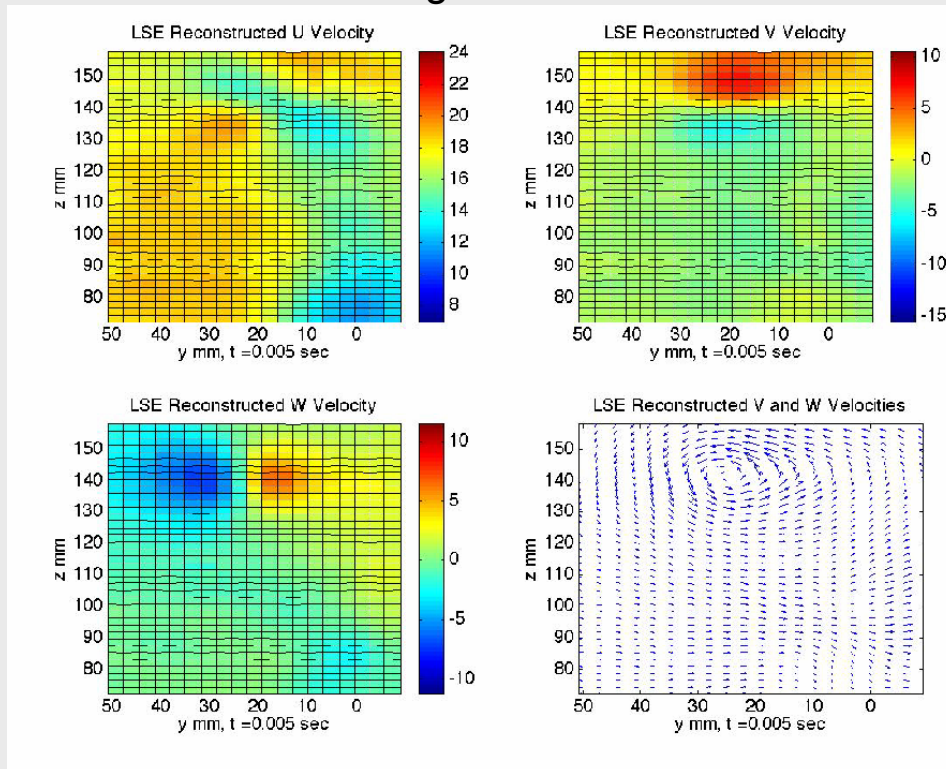
$$a_n^{est}(x_0, t) = \sum_{k=1}^q A_{nk} \varepsilon_k(t)$$

Estimation de la vitesse en aval

$$U_i(x_0, y, z, t) = \sum_{n=1}^m a_n^{est}(x_0, t) \phi_i^{(n)}(x_0, y, z)$$



Movie Estimating Wake Flow Field AOA 15°



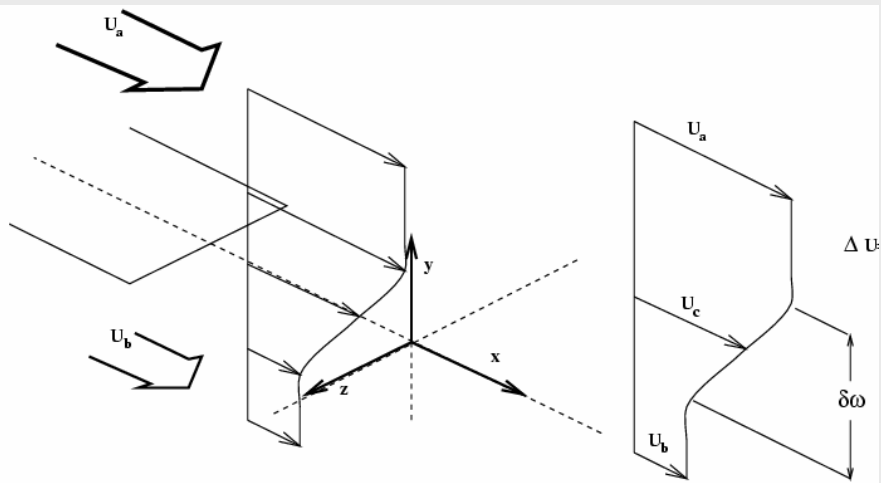
101

5) Illustration de la POD sur un cas complet :
la couche de mélange plane turbulente



102

5) Illustration de la POD sur un cas complet



La couche de mélange CdM

- \exists an homogeneous direction z
- \exists a quasi-homogeneous direction x (thin layer assumption)
- \exists a stationary direction t
- \exists a strongly inhomogeneous direction y

103

5) Illustration de la POD sur un cas complet



POD CLASSIQUE

104



Forme générale du problème POD

$$\sum_{j=1}^{N_c} \int R_{ij}(\underline{X}, \underline{X}', \underline{k}) \Phi_j^{(n)}(\underline{X}', \underline{k}) d\underline{X}' = \lambda^{(n)}(\underline{k}) \Phi_i^{(n)}(\underline{X}, \underline{k})$$

\underline{X} direction dans laquelle la POD est appliquée

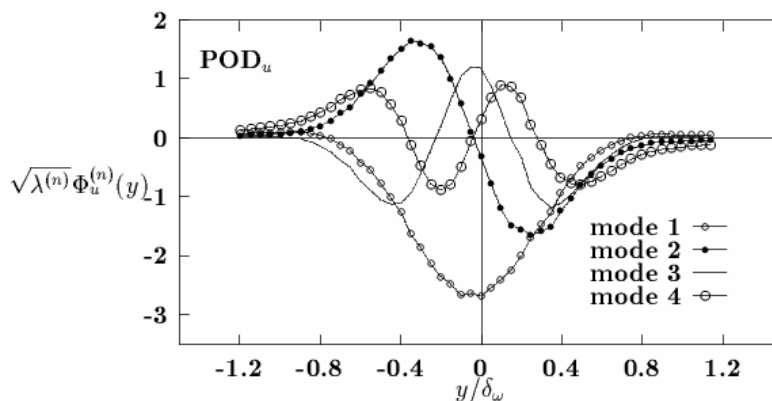
\underline{k} direction « homogène » → Fourier

105



5.1) POD 1D-1C

- Pure spatial POD : $N_c = 1$, $\underline{X} = y$, \underline{k} not considered



Shape of first eigenvectors - POD 1D

106

5) Illustration de la POD sur un cas complet

5.1) POD 1D-1C



Couche de Mélange plane légèrement chauffée [LEA]

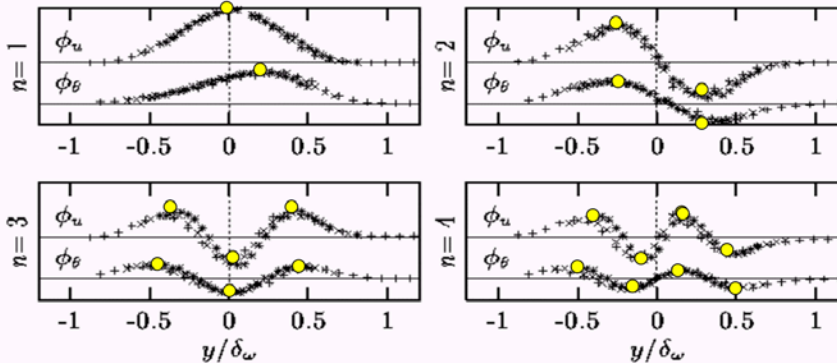
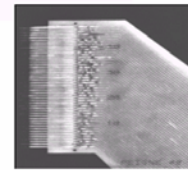


Figure 1: Shape of first four modes of POD_u and POD_θ for 3 axial positions: $x/D=2, 3$ and 4 (symbols $+$, \times and $*$ resp.). Plotted are $\sqrt{\lambda_\alpha^{(n_\alpha)} \phi_\alpha^{(n_\alpha)} / \Delta \alpha}$



On note: \rightarrow augmentation du nbre d'extrema \bullet avec le mode
 \rightarrow ressemblance des fonctions propres de u et θ

107

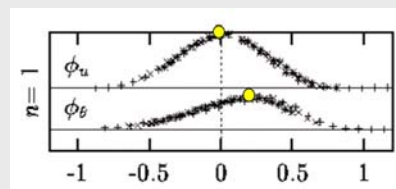
5) Illustration de la POD sur un cas complet

5.1) POD 1D-1C

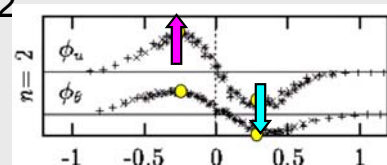
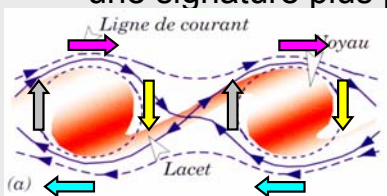


+ La forme spécifique des deux premiers modes de cette POD montre ses limitations :

+ le premier mode, optimal au sens de l'énergie, tend à représenter la distribution d'énergie (Gaussienne).



+ Il est *aveugle* au passage des grosses structures de la CdM qui ont une signature plus proche du mode #2



+ Il faut donc prendre garde à l'assimilation **1er mode = structure** : cela dépend en fait du niveau et du type de POD considéré...

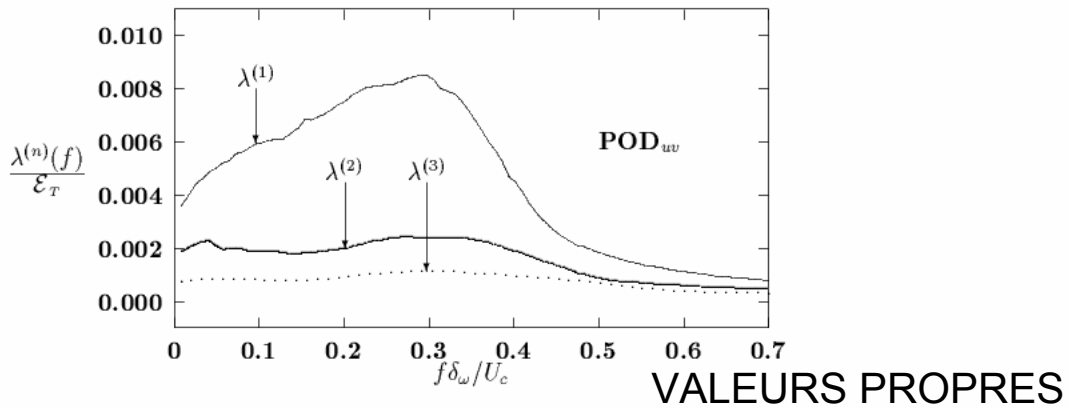
108

5) Illustration de la POD sur un cas complet



5.2) POD 1D-2C

- POD in space-frequency domain : $N_c = 2$, $\underline{X} = y$, $\underline{k} = f$



First 3 eigenvalues. Vectorial POD based on uv .

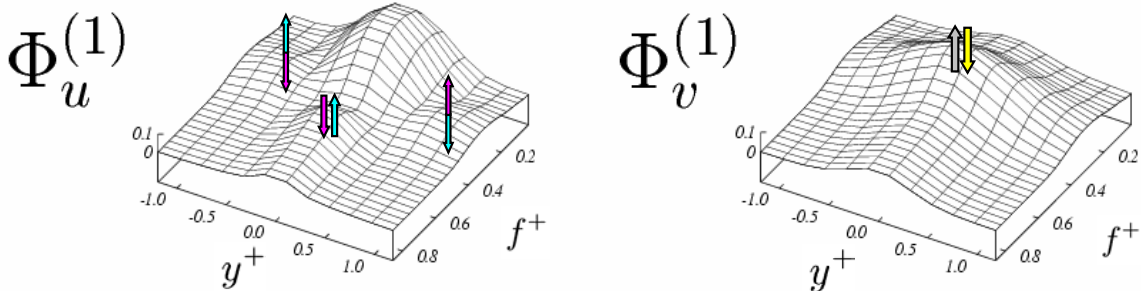
- + Quoique l'on résolve un problème POD indépendamment pour chaque fréquence, on notera l'excellente continuité obtenue...

109

5) Illustration de la POD sur un cas complet



5.2) POD 1D-2C



VECTEURS PROPRES

Shape in frequency domain of first eigenvector. Vectorial POD based on uv . Plotted: $\sqrt{\lambda^{(1)}(f)} \|\tilde{\Phi}_i^{(1)}(y, f)\|$
 ($y_+ = y/\delta_\omega$ and $f_+ = f\delta_\omega/U_c$).

- + En augmentant le degré de liberté du problème POD, le **premier mode** devient capable de décrire à la fois le comportement des 2 composantes de la vitesse dans le contexte de « grande structure ».
- ➔ En particulier un comportement spécifique peut apparaître pour des bandes de fréquence différentes.

110

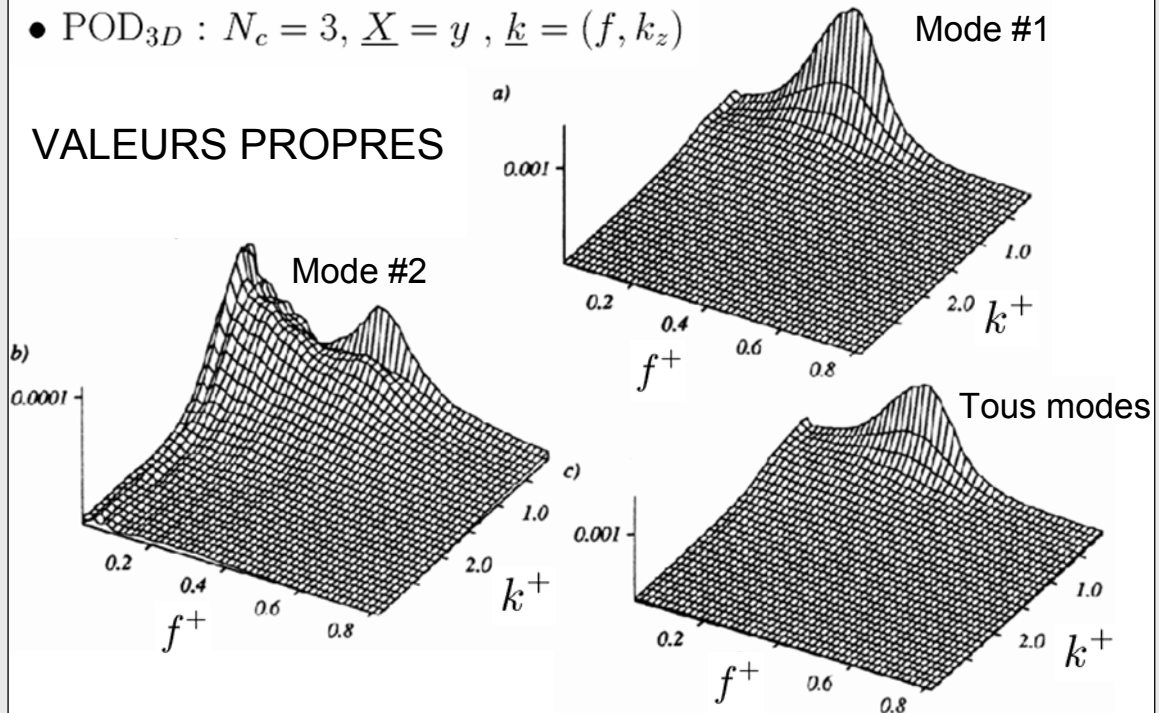
5) Illustration de la POD sur un cas complet

5.3) POD 3D-3C



- $POD_{3D} : N_c = 3, \underline{X} = y, \underline{k} = (f, k_z)$

VALEURS PROPRES



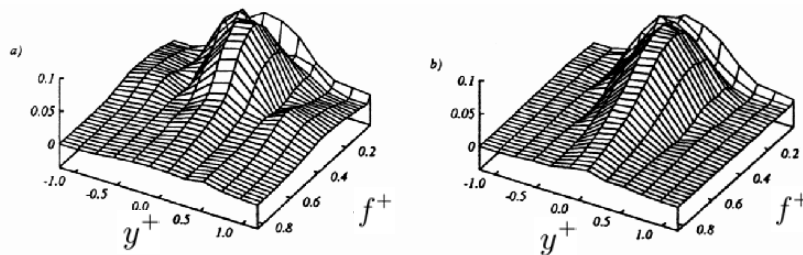
111

5) Illustration de la POD sur un cas complet

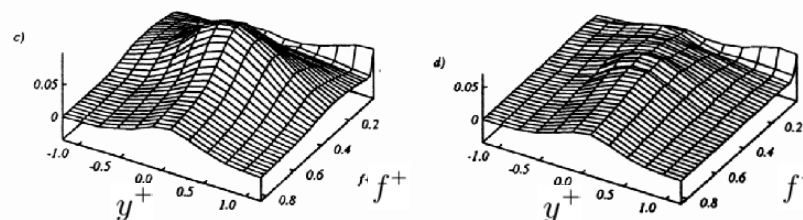
5.3) POD 3D-3C



- $POD_{3D} : N_c = 3, \underline{X} = y, \underline{k} = (f, k_z)$



VECTEURS PROPRES : mode#1 pour qq. nombres d'onde transversaux sélectionnés



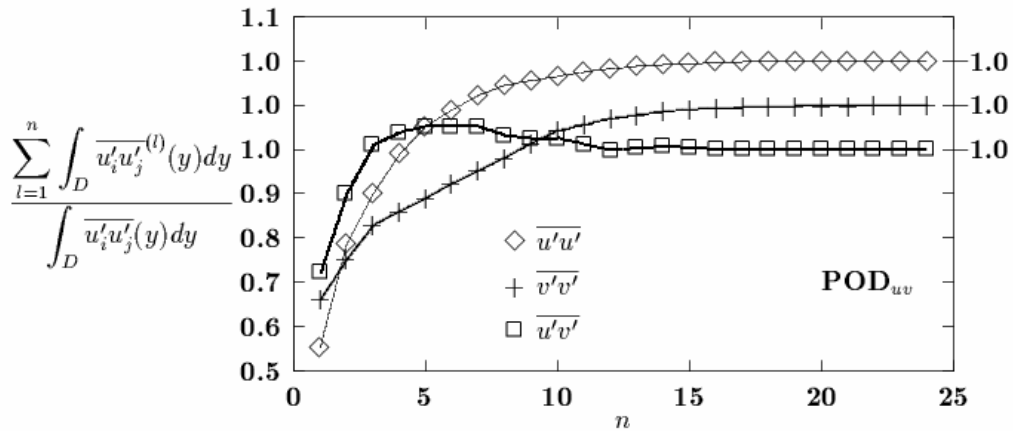
112

5) Illustration de la POD sur un cas complet

5.3) POD 3D-3C



● Convergence :



Convergence of Reynolds stress Vectorial POD
 ($N_c = 2, \underline{X} = y, \underline{k} = f$).

- + Convergence monotone des *termes énergétiques*
- + *Overshoot* de la composante croisée

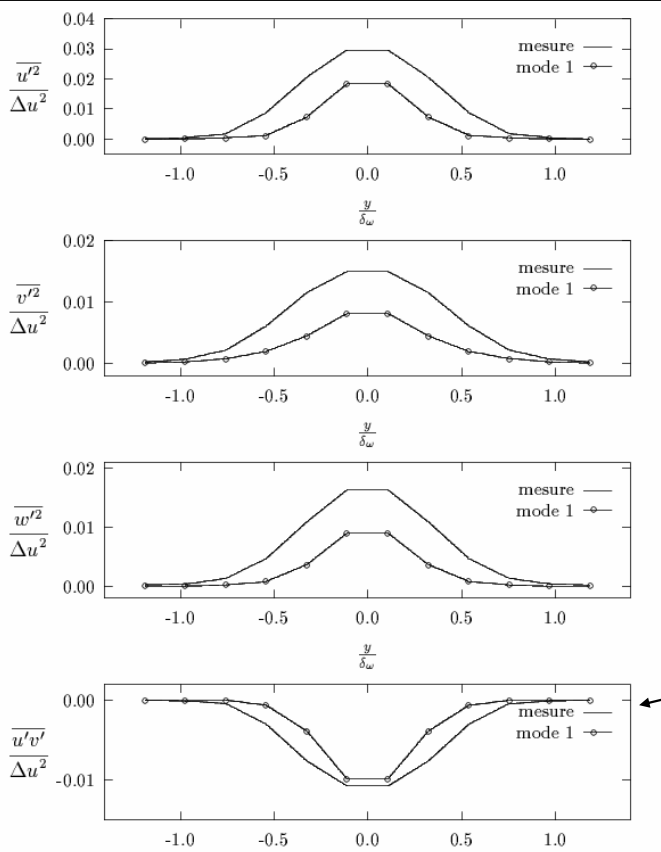
113

5) Illustration de la POD sur un cas complet



5.3) POD 3D-3C

Contribution du 1er mode POD aux tensions de Reynolds



- + Très bonne reconstruction des tensions croisées

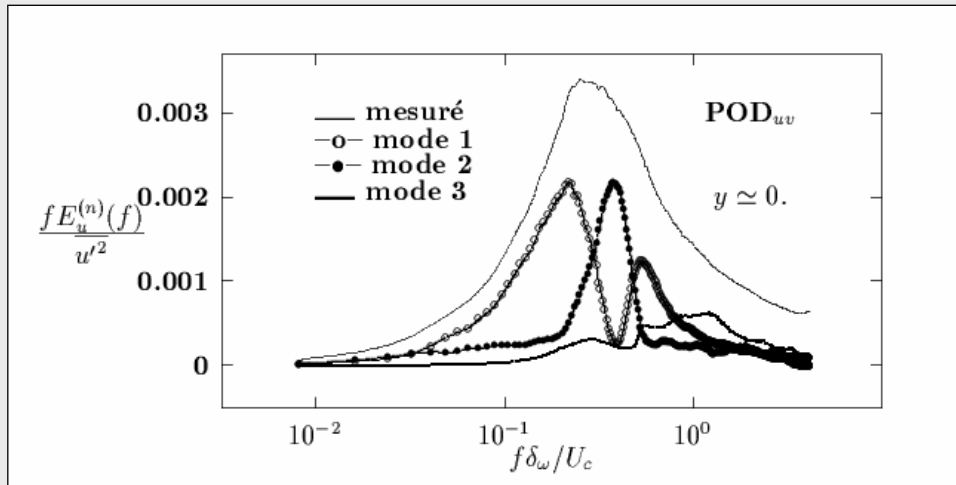
➔ On retrouve à la fois :
 l'énergie et la production d'énergie

114

5) Illustration de la POD sur un cas complet



5.4) Reconstruction spectrale



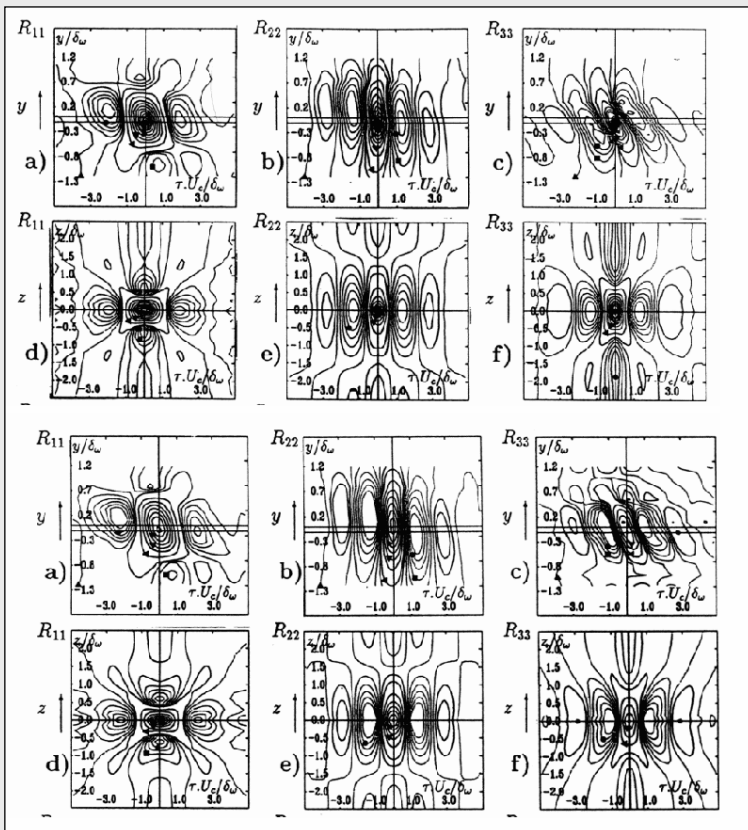
La hiérarchie des modes n'est pas forcément vérifiée localement

115

5) Illustration de la POD sur un cas complet



5.5) Reconstruction des Corrélations



Mesure

mode #1 de
POD3D

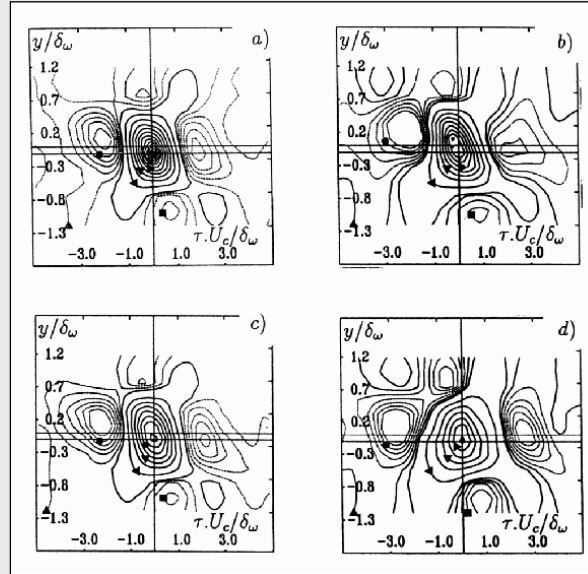
116

5) Illustration de la POD sur un cas complet

5.5) Reconstruction des Corrélations



Original



PODu

POD3D

PODuv

+ Plus la POD prend en compte de caractéristiques de l'écoulement, plus elle est représentative

%	POD _{1D}	POD _u	POD _{uv}	POD _{3D}
mode 1	37	46	44	49
first 3 modes	63	79	71	75

117

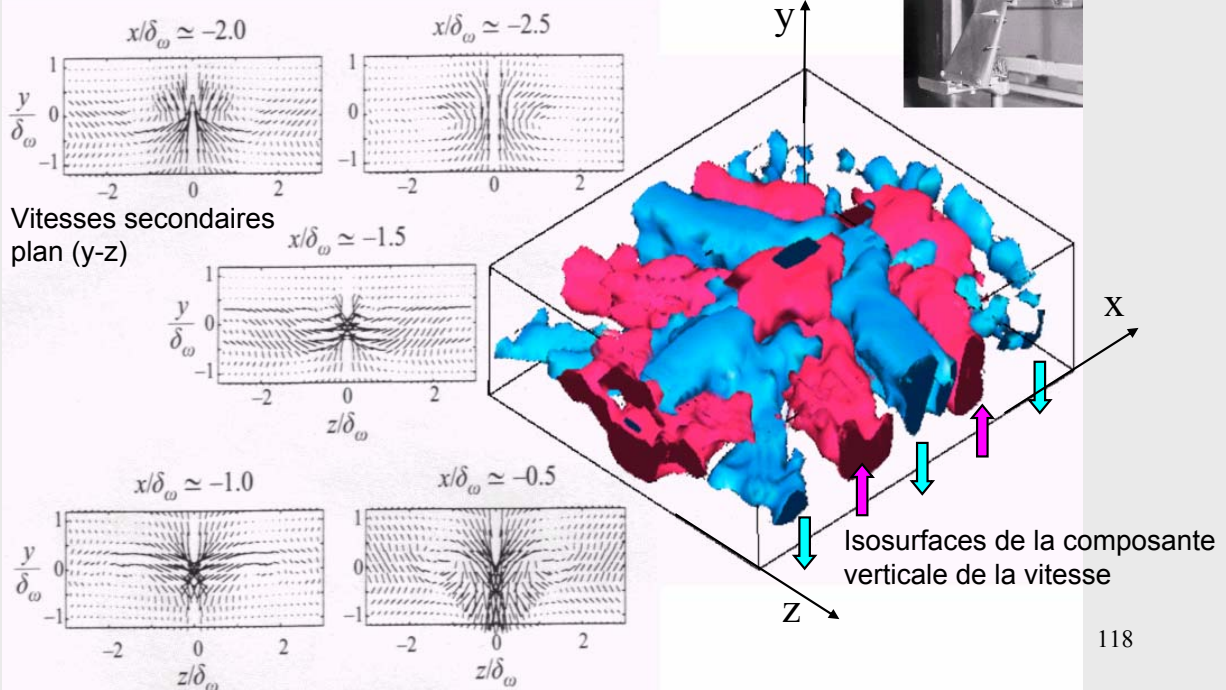
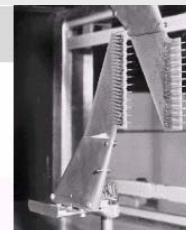
5) Illustration de la POD sur un cas complet

5.6) Structure « typique »



CdM plane P.O.D. + Shot-Noise. Mode #1 [LEA]

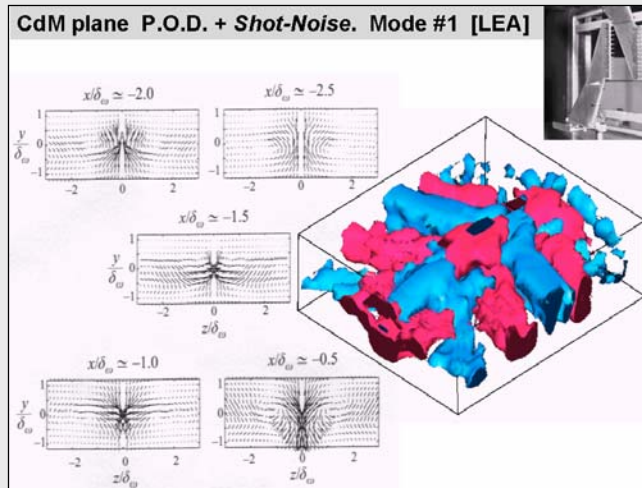
+ On pointe entre 2 structures (là où l'énergie est max.)



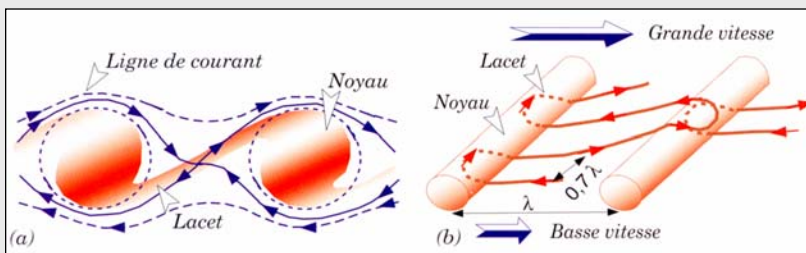
118

5) Illustration de la POD sur un cas complet

5.6) Structure typique



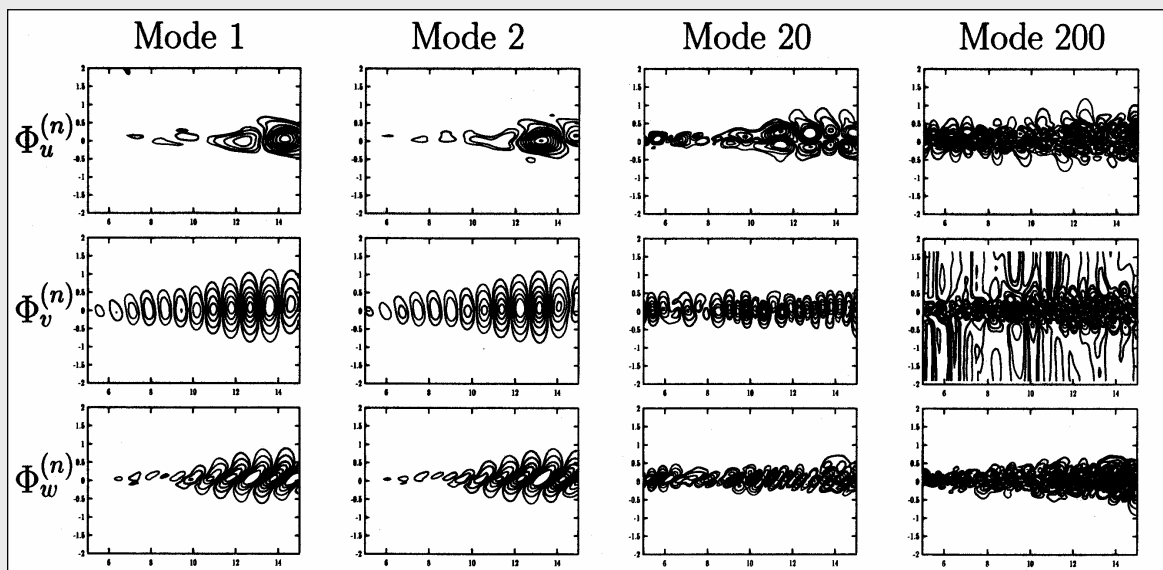
On retrouve l'organisation « classique »



119

5) Illustration de la POD sur un cas complet

5.7) POD de LES de CdM (cf § 4.2 [LEA-LIMSII])



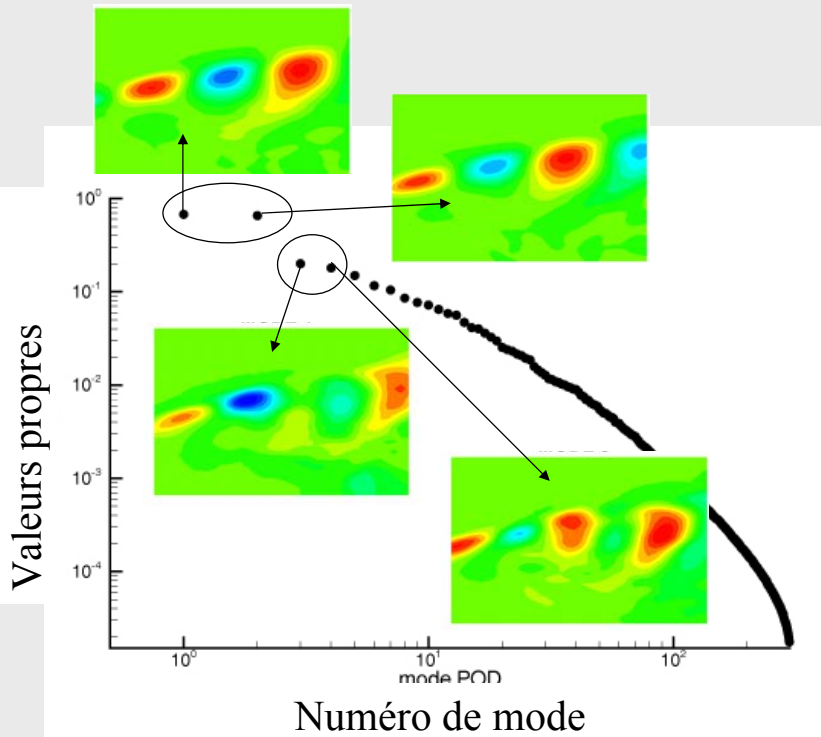
+ Fonctions propres : POD scalaire

- + plus les modes sont élevés en ordre plus les échelles sont petites
- + les modes 1 et 2 sont en quadrature spatiale (dû à la nature convective de l'écoulement [Remfer 1993])

120



→ Dans la description POD d'un phénomène convectif les modes POD vont par paires évoluant en quadrature (2 modes POD == 1 mode physique)



121

5) Illustration de la POD sur un cas complet



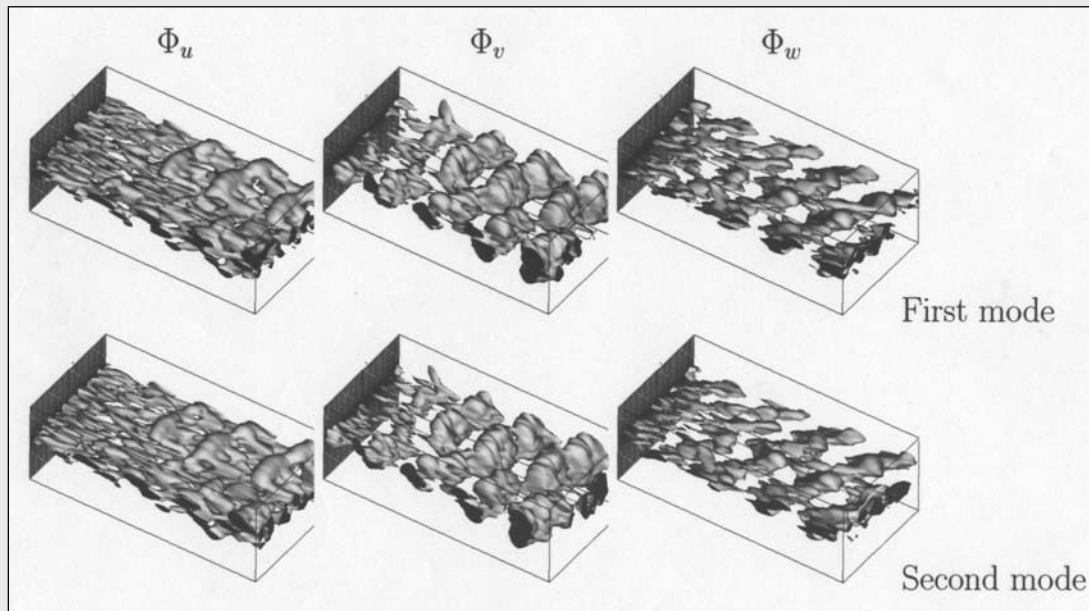
SNAPSHOT POD

122



5) Illustration de la POD sur un cas complet

5.8) Snapshot POD de LES de CdM (cf § 4.2 [LEA-LIMSI])



+ Fonctions propres :

- + les modes 1 et 2 sont en quadrature spatiale
- + composante v : plus 2D

123



5) Illustration de la POD sur un cas complet

5.8) Snapshot POD de LES de CdM (cf § 4.2 [LEA-LIMSI])

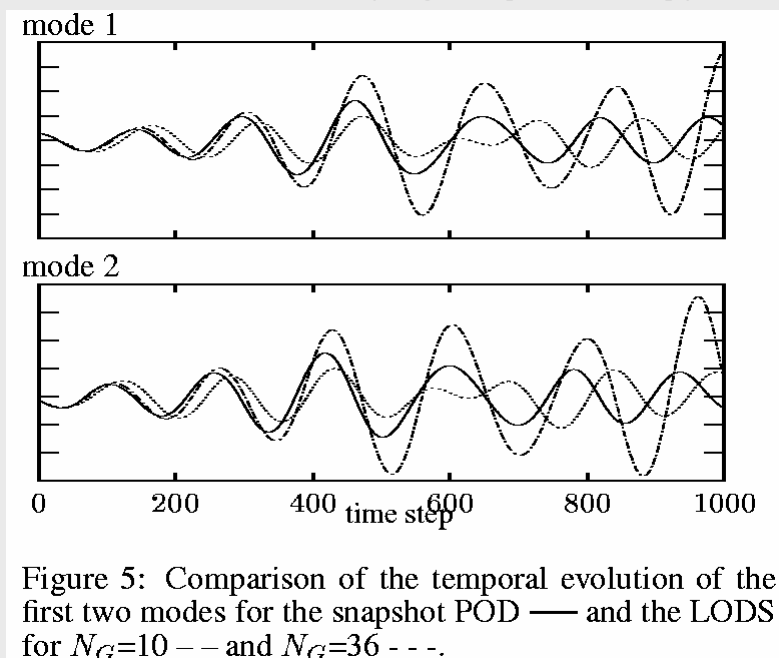


Figure 5: Comparison of the temporal evolution of the first two modes for the snapshot POD — and the LODS for $N_G=10$ - - and $N_G=36$ - - -.

+ Coefficients de projection :

- + les modes 1 et 2 sont en quadrature temporelle

124



6) Autres exemples d'application de la POD

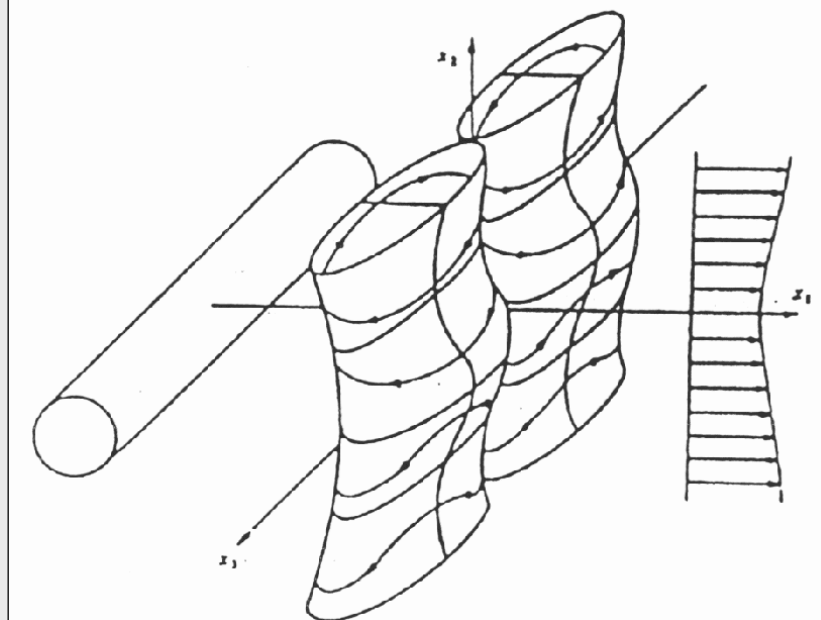
125

6) Autres exemples d'application de la POD



- Payne & Lumley (Phys. Fluids 1967)

first historically: POD applied to wake data by Grant (1958)



126

6) Autres exemples d'application de la POD



Examples of shotnoise reconstruction ...

- Herzog (Ph'd 1986) experimental study of a pipe flow

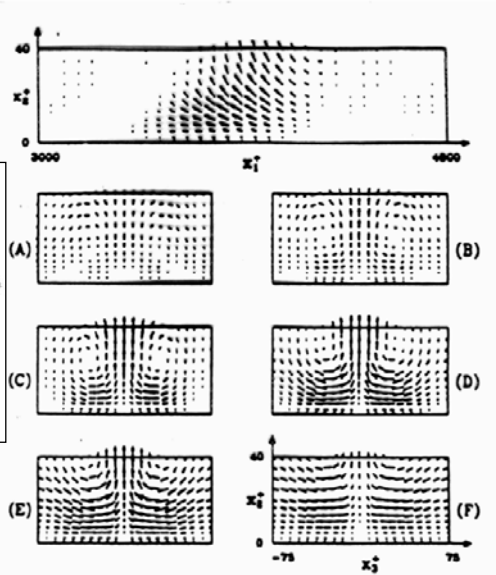
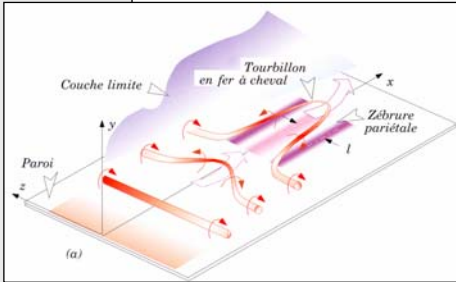


Figure 49: Velocity field of typical eddy (zero phase-shift in symmetry plane and various cross-sections cuts, looking downstream. Values of their downstream position x_1^* :

(A) 3660	(B) 3720	(C) 3780
(D) 3900	(E) 4020	(F) 4140

127

6) Autres exemples d'application de la POD



- Moin & Moser (J.F.M 1989) DNS of a Channel Flow

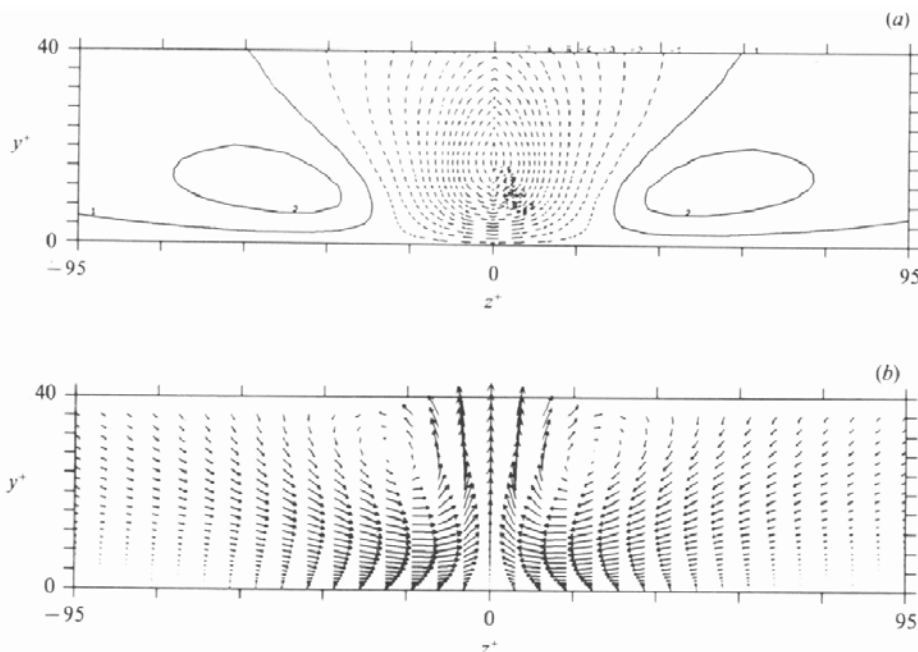


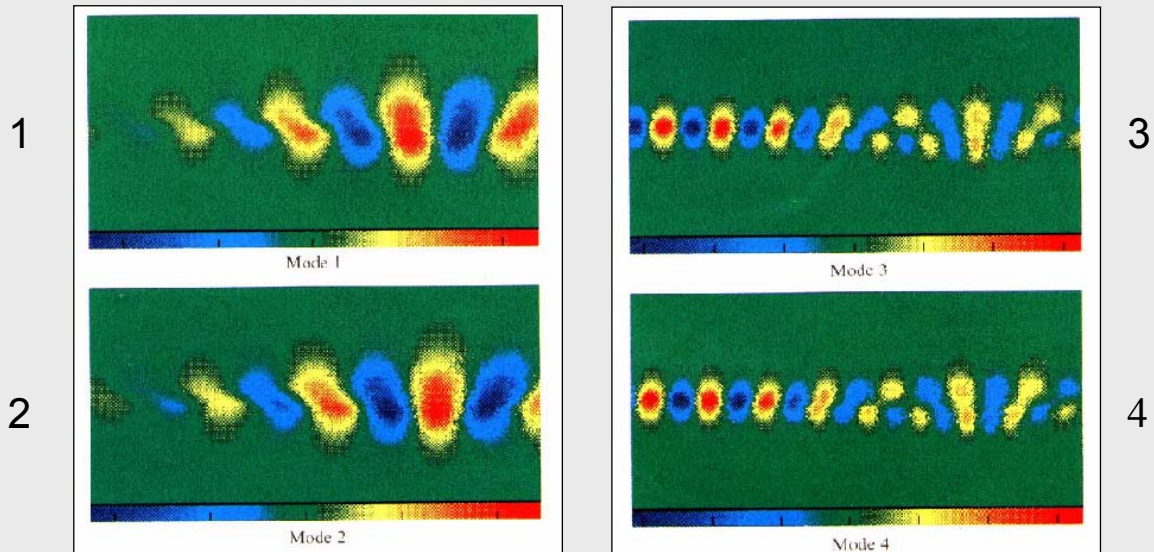
FIGURE 10. Two-dimensional zero-phase characteristic eddy in the near-wall domain ($y^+ \leq 40$), (a) contours of u and (b) velocity vectors projected into the (y, z) -plane. Contour increment in (a) is 1. Negative contours are dashed.

28

6) Autres exemples d'application de la POD



+ Exemple de snapshot POD : étude expérimentale CdM excitée
[Rajaei et al. 1994]



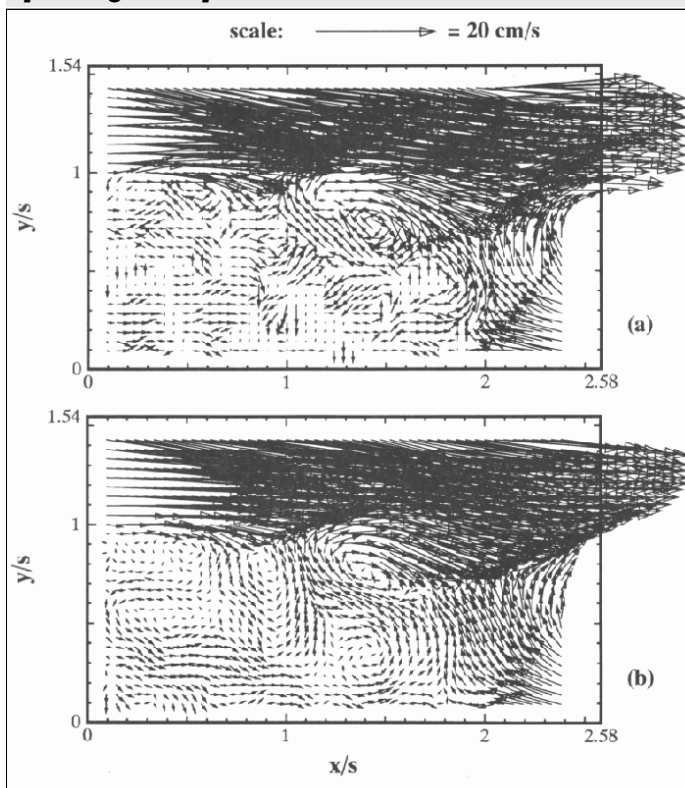
Composante verticale de la vitesse : Modes 1 à 4

129

6) Autres exemples d'application de la POD



+ Exemple de snapshot POD : basée sur PIV marche descendante
[Huang 1994]



Cliché original

Cliché filtré à 50 modes

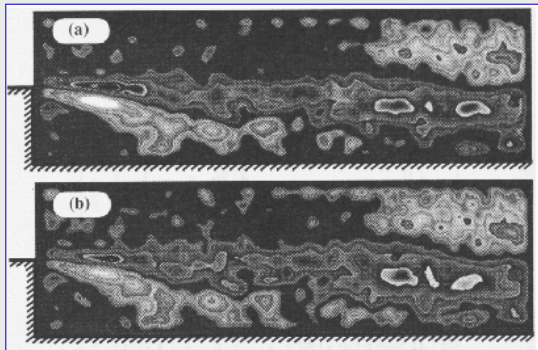
130

6) Autres exemples d'application de la POD



+ Exemple de snapshot POD : basée sur PIV marche descendante

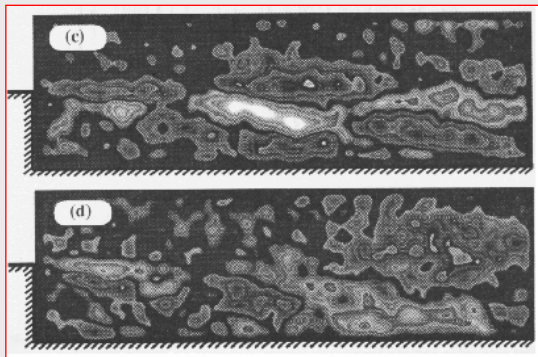
POD sur **vitesse** vs POD sur **vorticité** [Huang 1994]



Mode 1

Energie

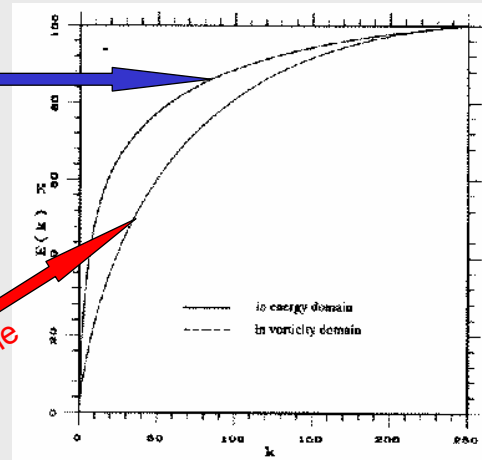
Mode 2



Mode 1

Enstrophie

Mode 2



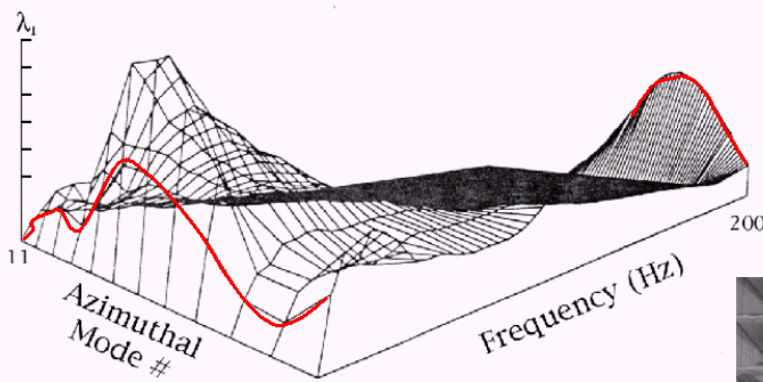
Energie cumulée fonction du mode

131

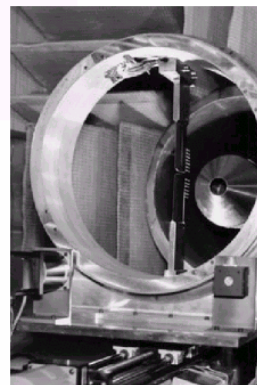
6) Autres exemples d'application de la POD



Jet axi. [Glauser]



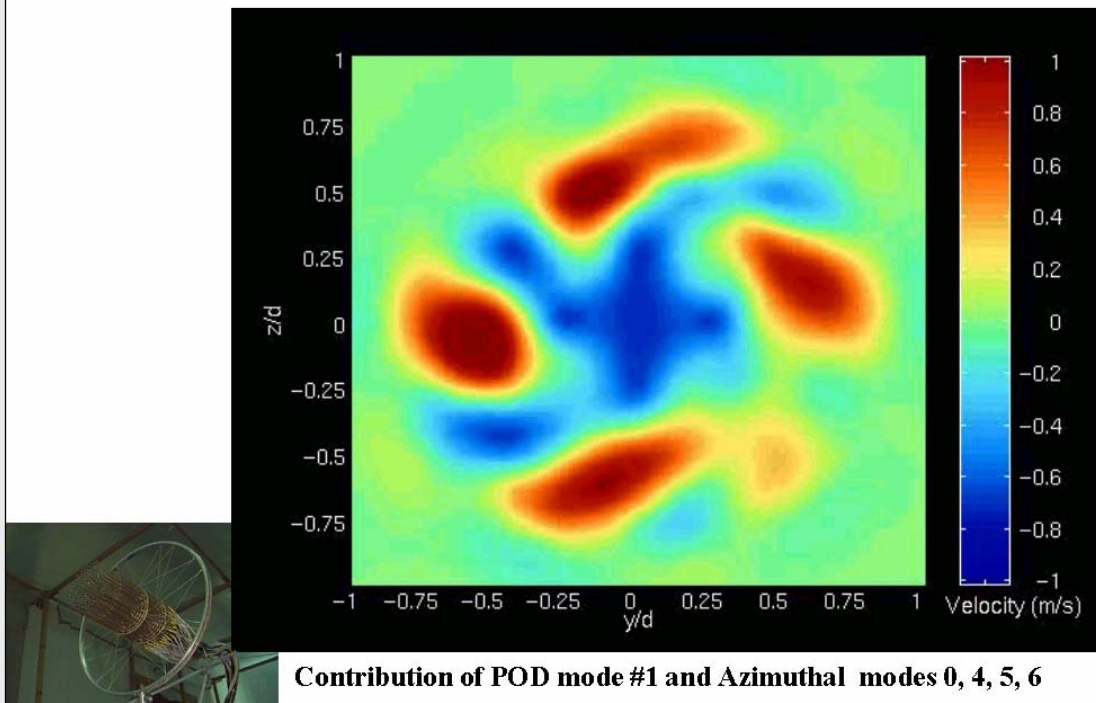
→ Importance modes azimutaux # 4-5-6



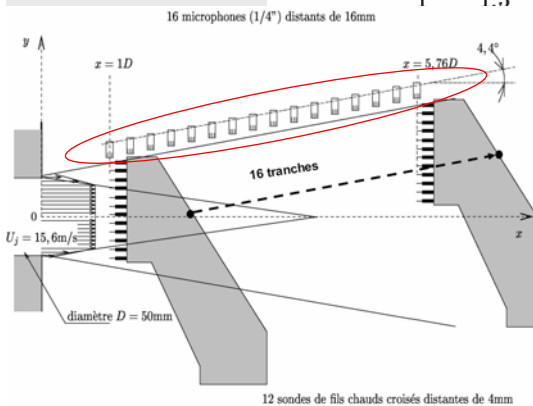
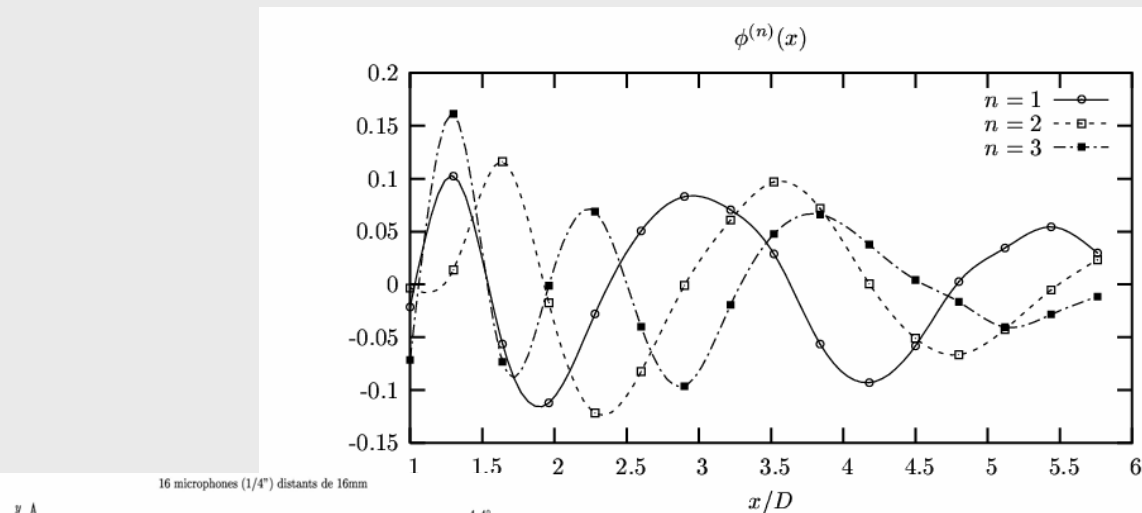
132



Fluctuations Instantanées de vitesse axiale (Jet axi.) [Citriniti]



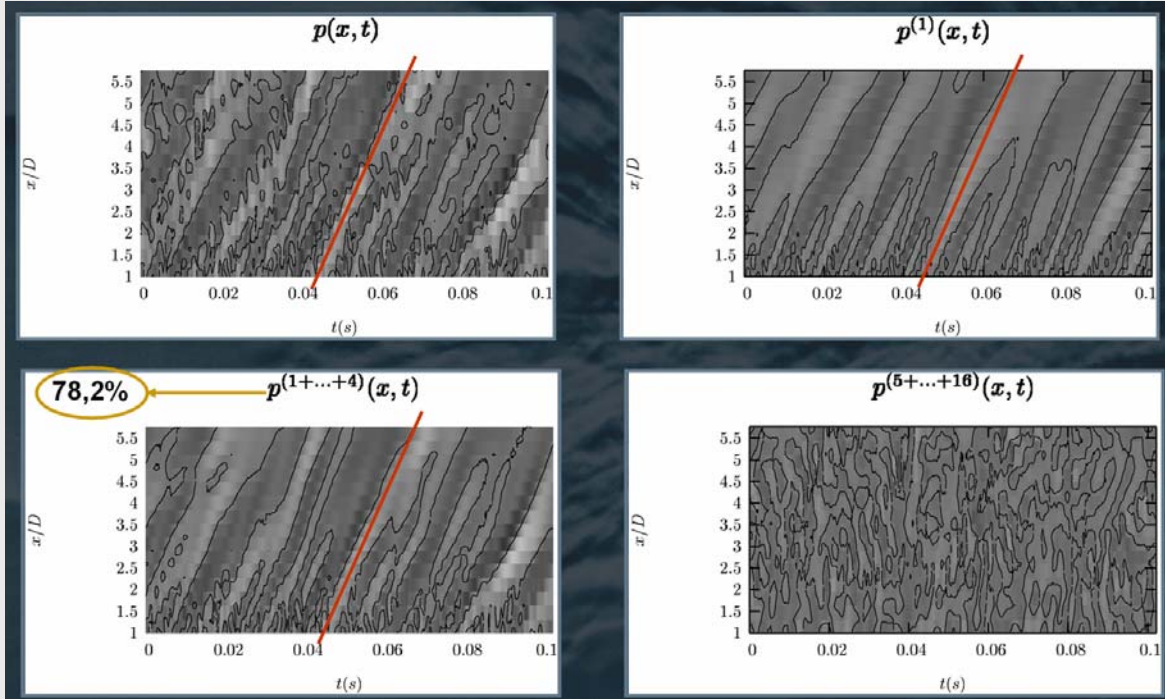
133



3 premiers modes pression en voisinage jet

[Picard 2001]

134



POD un filtre à « structures »



7) Identification de LODS via la POD

7) Identification de LODS via la POD



+ On peut obtenir de belles caricatures

4.1) Extraction d'organisation privilégiée, de « structure »
4.1.a) ... exemple du trombinoscope

Mr X

Caricatures POD de Mr X à 10, 20, 30 et 40 modes

10 20
30 40

10 modes (10 coefficients) permettent de reconnaître Mr X

73

137

7) Identification de LODS via la POD



- + Les caricatures obtenues ne dépendent pas de la chronologie !
- + Peut-on les faire vivre?

Un exemple:

Practical Generation of Video Textures using the Auto-Regressive Process

Neill Campbell, Colin Dalton, David Gibson and Barry Thomas
Department of Computer Science
University of Bristol
Bristol, BS8 1UB
Neill.Campbell@bristol.ac.uk

138



Utilisation de Modèles Auto Régressifs AR

The “Campfire”

Partant d'une vidéo d'un feu de camp



Analyse ACP



Modélisation AR dynamique des **a**



Création d'un feu virtuel

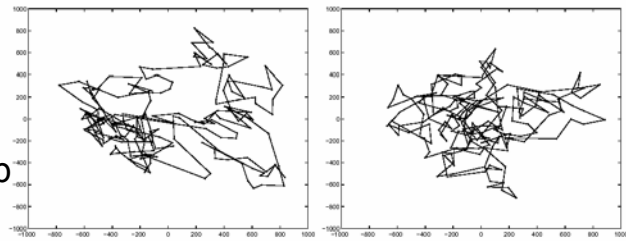


Figure 1: (Left) The original campfire sequence projected into a two-dimensional eigenspace for clarity. It is this ‘signature’ that we aim to model automatically. The axes show response to the dominant eigenvectors of the campfire images. (Right) One reconstruction of the campfire signature automatically generated using an auto-regressive model.



Figure 2: Three of the resulting frames from the new sequence of the campfire. All frames are synthesised, never having appeared in the original clip.



The “Laughing man”



Figure 6: Four images from the ‘laughing man’ image sequence. In the video clip a man is laughing, talking and smiling in a very animated manner, throwing back his head; moving his eyebrows.

Partant d'une vidéo d'un rire



Analyse ACP



Modélisation AR dynamique des **a**



Création d'un rire virtuel



Figure 9: Four frames from a new laughing man sequence. All of the images shown here are synthesised and were not present in the original sequence.



Projection POD-Galerkin & Turbulence

→ Systèmes Dynamiques

- **Equations du mouvement** : Navier-Stokes $dU/dt=NS(U)$ problème aux dérivées partielles : NS contient des opérateurs dérivée spatiale
- **Projection** des équations NS sur la base POD : toutes les dérivées spatiales disparaissent ...
- **Troncature** de la décomposition : on conserve les **N** premiers modes
- **Système d'Equations Différentielles Ordinaires (EDO)**

$$da_i/dt = f_i(a_1, a_2, \dots, a_N)$$

- f_i sont des fonctions polynomiales – au moins quadratiques (interactions non linéaires) au plus cubiques.
- **Difficultés** : on a besoin de connaître partout les 3 composantes de la vitesse, la pression, et de tenir compte des conditions frontières...

→ **Difficilement applicable**

141



Peut-on dépasser ces difficultés ?

Oui ...

- En considérant des sous-domaines (*tranches*) de l'écoulement, ou des *variables partielles bien choisies* représentatifs de la dynamique globale
- En faisant l'hypothèse que leur dynamique est de même nature que celle du problème complet (*c-à-d de type polynomial*)
- En cherchant à identifier ce sous système directement à partir de la dynamique des coefficients de projection...
- Les modes négligés lors de la troncature sont alors pris en compte implicitement lors de l'identification

141



Formulation dynamique ordre bas

HYPOTHESE :

$$\frac{da_i}{dt} = M_i + \sum_{j=1}^N L_{ij} a_j + \sum_{j=1}^N \sum_{k=j}^N Q_{ijk} a_j a_k + \sum_{j=1}^N \sum_{k=j}^N \sum_{l=k}^N C_{ijkl} a_j a_k a_l$$

IDENTIFICATION :

- Connaissance simultanée d'échantillons $\{a_i\}$ et $\{da_i/dt\}$
- On peut calculer des corrélations, par exemple :

$$\langle a_m \frac{da_i}{dt} \rangle = M_i \langle a_m \rangle + \sum_{j=1}^N L_{ij} \langle a_j a_m \rangle + \sum_{j=1}^N \sum_{k=j}^N Q_{ijk} \langle a_j a_k a_m \rangle + \sum_{j=1}^N \sum_{k=j}^N \sum_{l=k}^N C_{ijkl} \langle a_j a_k a_l a_m \rangle$$

- Par une approche aux moindres carrés, on peut espérer déterminer les coefficients **M**, **L**, **Q** et **C**

SYSTEME DYNAMIQUE : les paramètres **MLQC** étant identifiés, à partir de conditions initiales $a_i(t_0)$ on peut obtenir un développement temporel des coefficients de projection, c-à-d de l'écoulement (Runge-Kutta)

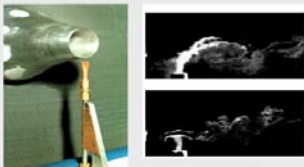
142



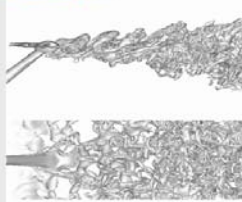
Trois exemples d'identification

L'information disponible n'est pas nécessairement résolue en temps, on traite une information réduite (sur une tranche) issue de grandeurs partielles (quelques composantes de la vitesse, concentration).

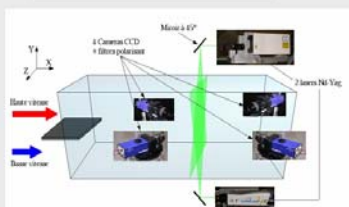
On connaît les a_i et on estime les $da_i/dt \sim (a_i(t+\Delta t) - a_i(t)) / \Delta t$



Description caricaturale de l'interaction de jets à $M=1.4$ à partir de visualisations de l'écoulement



Prédiction à court terme de l'évolution d'un écoulement à partir de données issues d'une simulation numérique directe (DNS)



Modélisation de la dynamique d'un écoulement dans une section donnée à partir de Vélocimétrie par Image de Particules (PIV) à temps décalés

143



Visualisations de jet Supersonique

Interaction Jet-Couche de Mélange (Jet-CdM)

Jet ppal

Jet de contrôle (ensemencé)

Battement ~ 15 kHz

$t + 5\mu s$

$Mach=1.37$
 $(P_{gen}=3 \text{ bar})$
 $T_{gen}=260 \text{ K}$
 $U_2=40 \text{ m/s}$
 $M=1.37$

- Visualisations à temps décalés obtenues par un système PIV
- 400 paires de clichés (non corrélées)
- Décalage de temps : $\Delta t=5\mu s$
- Chaque paire est séparée de 0.1 s



Visualisations de jet Supersonique

POD appliquée aux niveaux de gris des visualisations

2 clichés instantanés

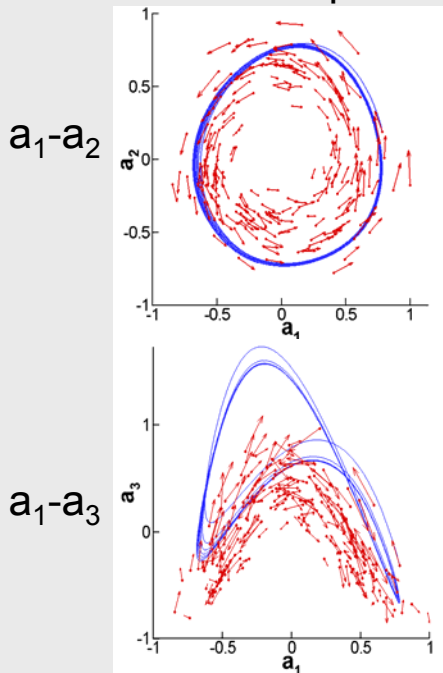
Quatre premiers modes POD

Caricature à 4 modes des clichés

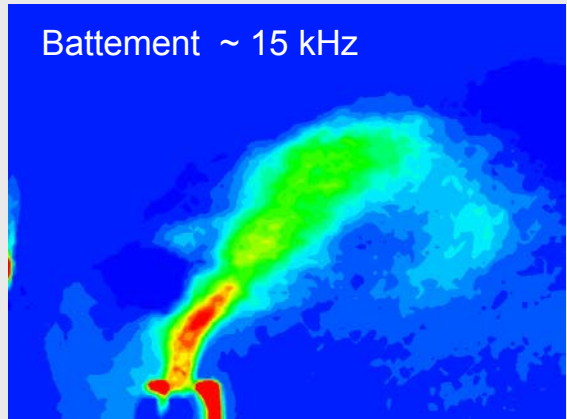
Visualisations de jet Supersonique

Reconstruction de la dynamique (4 equations) :
intégration temporelle du modèle réduit (Runge Kutta)

Portraits de phase



Battement ~ 15 kHz



Cycle limite :

- Fréquence correcte
- Reproduction du comportement à grande échelle

147

Visualisations de jet Supersonique

Conclusions (1)

- On ressort ici une dynamique à partir uniquement d'une série de mesures des coefficients de projection et de leurs dérivées temporelles à des *instants discrets* : On n'a pas besoin de la chronologie de ces coefficients.
- L'approche identification permet de faire ressortir clairement une dynamique de type cycle limite

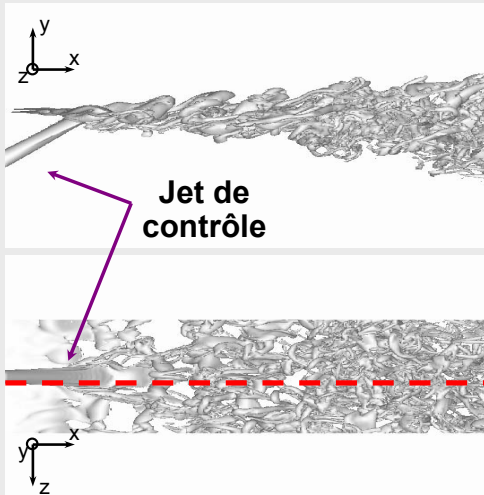
Oui mais ... on ne peut pas vérifier la qualité de ce modèle ... une approche DNS où tout est connu le permet ...

148

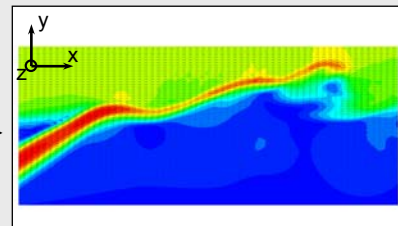
DNS d'une interaction jet-CdM

Interaction Jet – CdM approche DNS 3D

But : vérifier la prédiction à temps court du modèle identifié



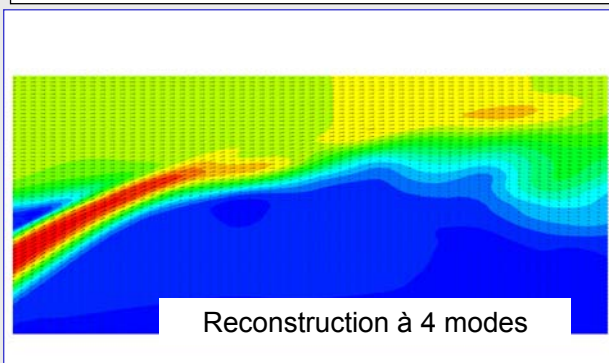
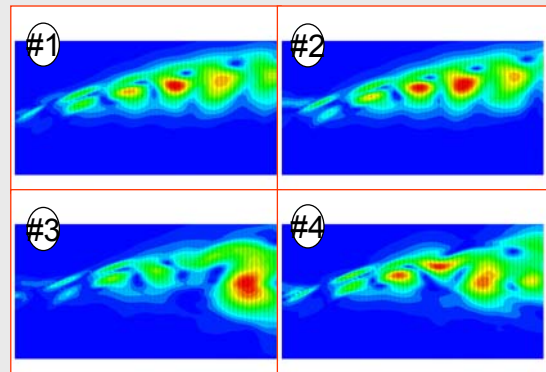
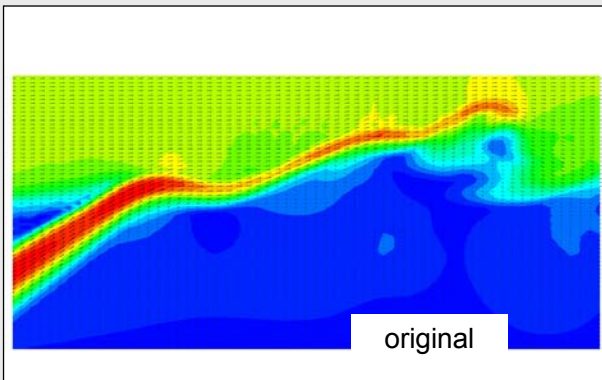
Extraction d'une tranche 2D pour développer un modèle d'ordre bas basé sur les composantes de la vitesse dans le plan d'analyse



149

DNS d'une interaction jet-CdM

Analyse POD du champ de vitesse 2D extrait

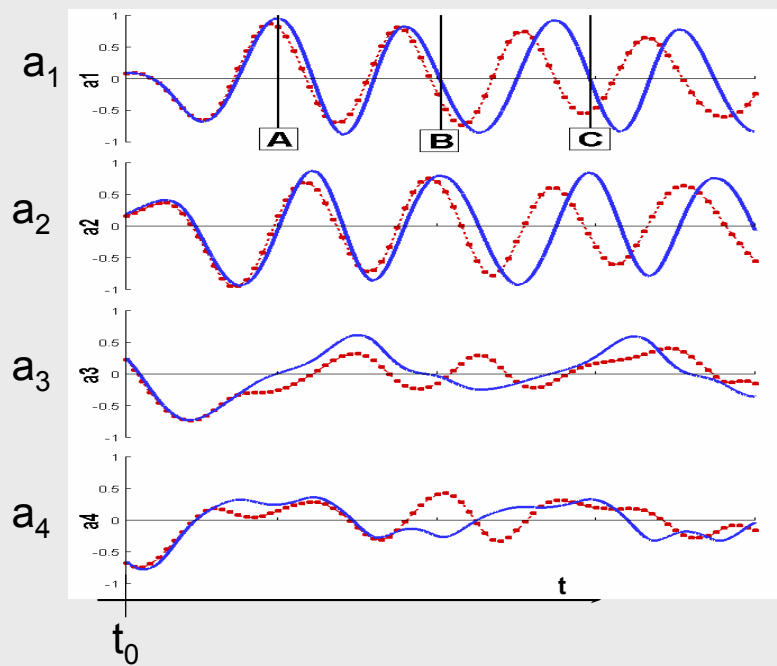


150

DNS d'une interaction jet-CdM

Prédiction à court terme (4 équations)

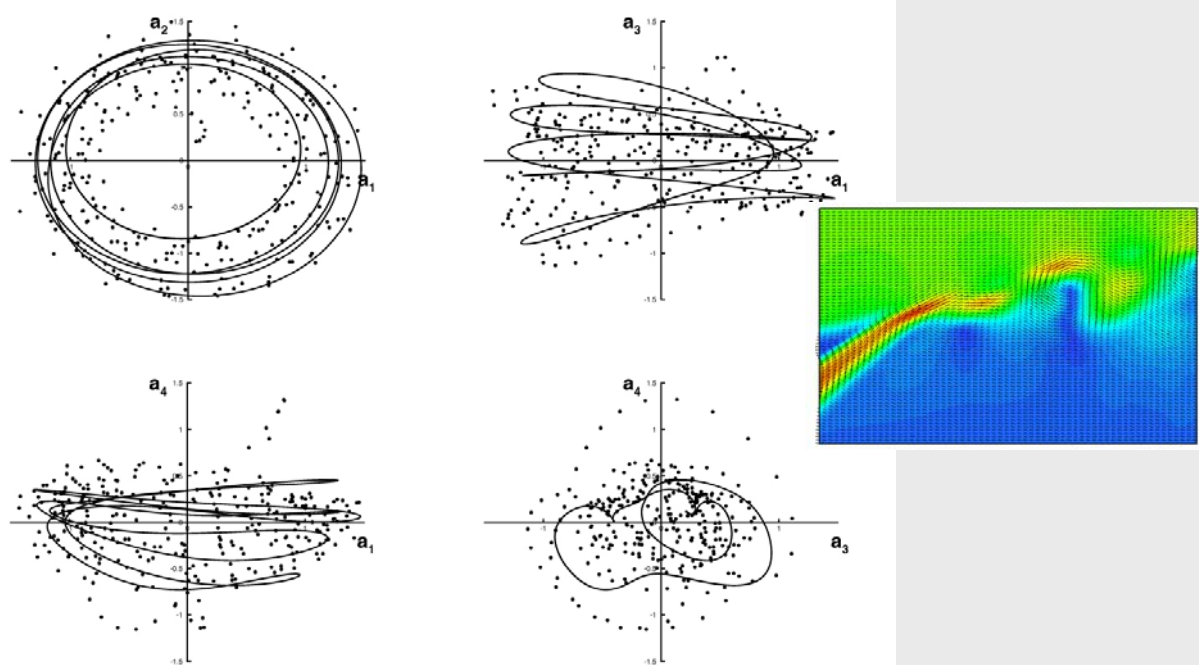
Comparaison des **coefficients résolus** à ceux du **modèle identifié**



151

DNS d'une interaction jet-CdM

Portraits de phase (4 équations)



152

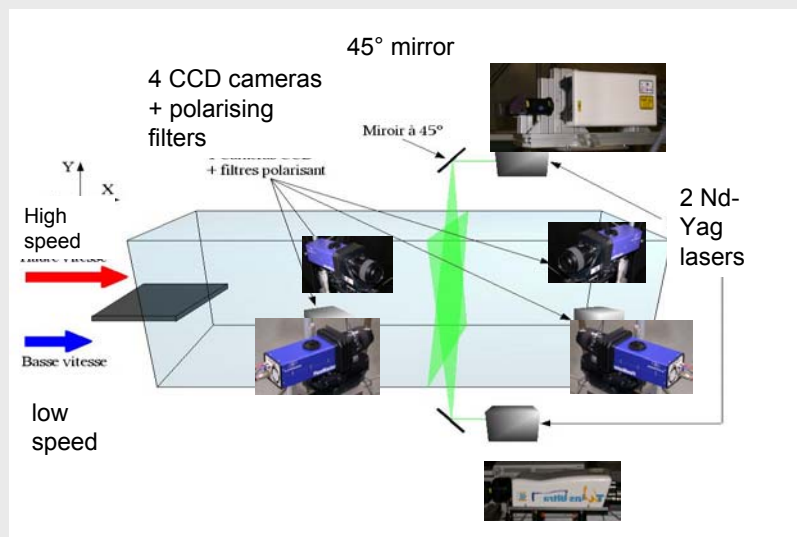
Conclusions (2)

- L'approche identification permet une prédiction à court terme *réaliste* de la dynamique de l'écoulement
- Applications : contrôle des écoulements

153

stereo PIV à temps décalé

Création d'histoires de signaux réalistes dans une Section normale à une CdM



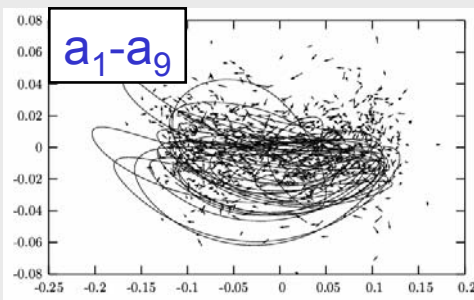
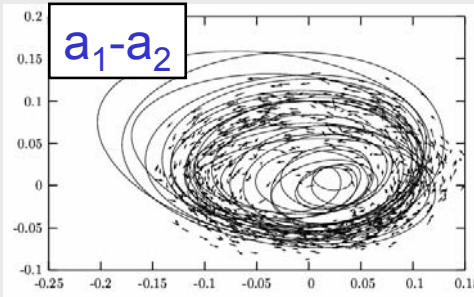
- Dual-time Stereoscopic PIV measurements
- 3 velocity component 2D field of the velocity at t and $t+\tau$
- $a_n(t)$, $a_n(t+\tau)$ and da_n/dt

154

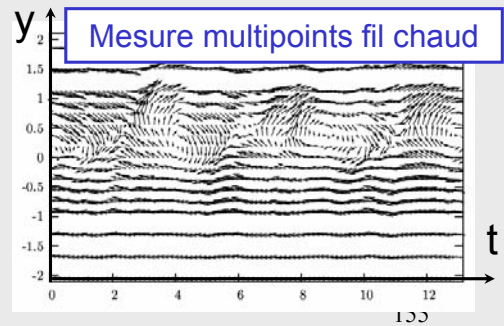
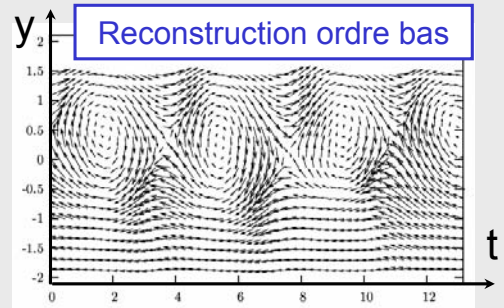
stereo PIV à temps décalé

(11 équations)

Portraits de phase

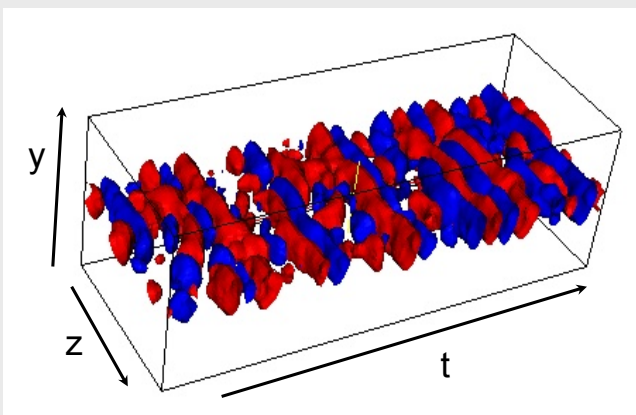


Comparaison avec des mesures définies temporellement

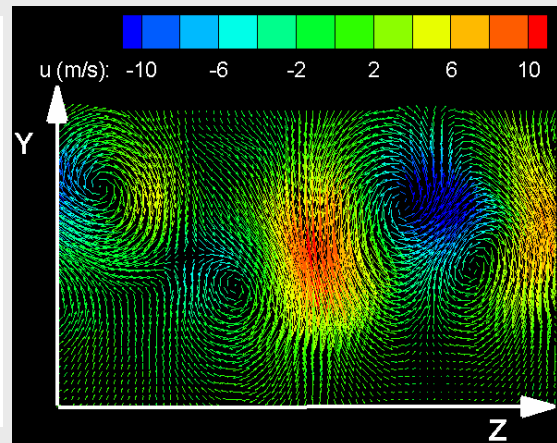


stereo PIV à temps décalé

Isosurface de $v(t)$



Reconstruction temporelle dans la section normale



Dynamique, fréquences et organisation des grandes structures en accord avec autres méthodes

- ✓ **L'identification** de Systèmes d'ordre bas représentatif de la dynamique de l'écoulement est possible ...
 - ✓ On peut mettre en évidence des cycles limites
 - ✓ On peut prévoir le comportement à court-terme
 - ✓ On peut générer des comportements chaotiques sur une *longue durée*

- On dispose d'un outil pour :
 - le contrôle
 - l'étude et la modélisation de la dynamique des grandes échelles de l'écoulement

157



8) POD étendue

Un consensus ? entre POD – LSE et Méthode Complémentaire

158



Extended POD Application to jet/vortex interaction

S. MAUREL ⁽¹⁾, J. BOREE ⁽²⁾, J.L. LUMLEY ⁽³⁾

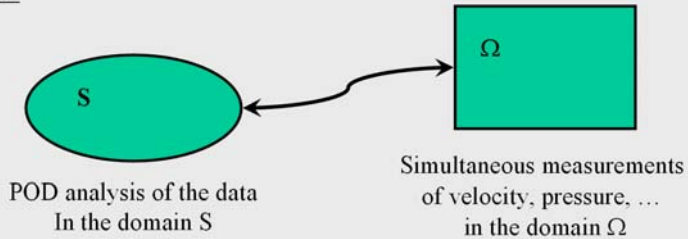
(1) PhD - former I.M.F. Toulouse now at PSA

(2) former I.M.F. Toulouse now at LEA - ENSMA

(3) Cornell University

Definition of extended modes (1)

Context

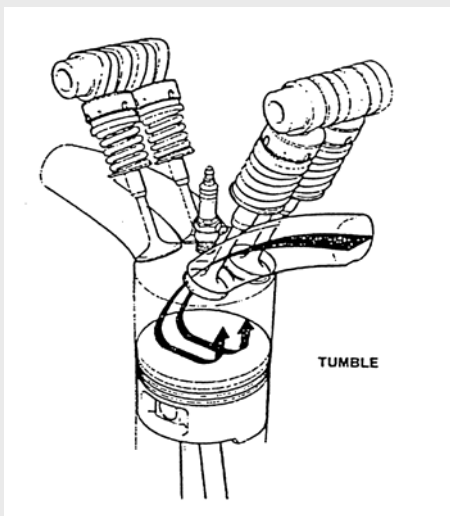


Goal :

- To extract in an objective way the link between the representative groups of POD modes in S and the correlated part of the signal in Ω .
- Procedure fully independent of the technique used to obtain POD decomposition (See Maurel, Boree, Lumley 2001 ; Boree 2003)

Context (1)

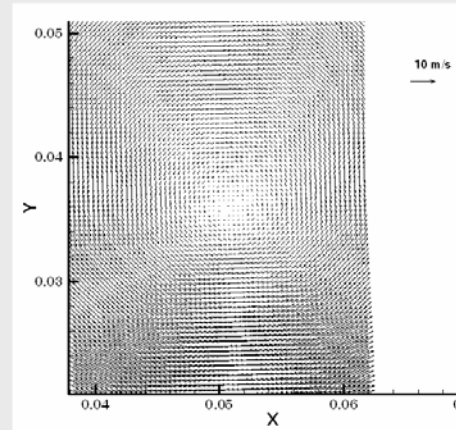
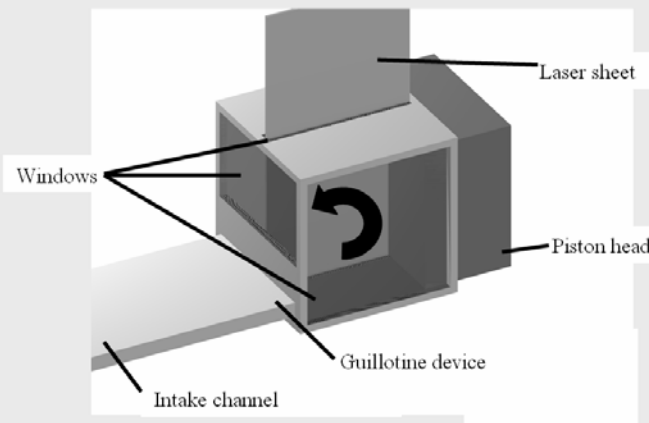
Analysis of In-cylinder flows in internal combustion engines



- Dynamical behaviour and stability of these flows ?
- Evolution of the turbulence velocity and length scales ?
 - * Effect of compression
 - * Effect of rotation
 - * Strong density differences
- Evolution of the mixture field ?

Flow analysed (1)

→ A model compression machine for the study of
Tumbling motion : (paper to appear in *Phys. Fluid – Borée & al 2002*)



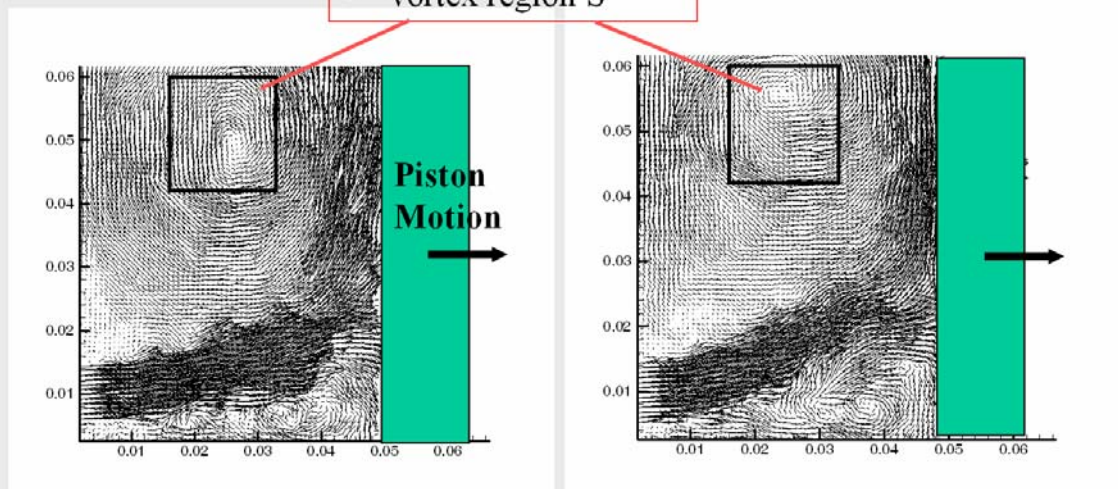
- PIV measurements in the middle plane

161

Flow analysed (2)

→ During intake : Analysis of jet/vortex interaction

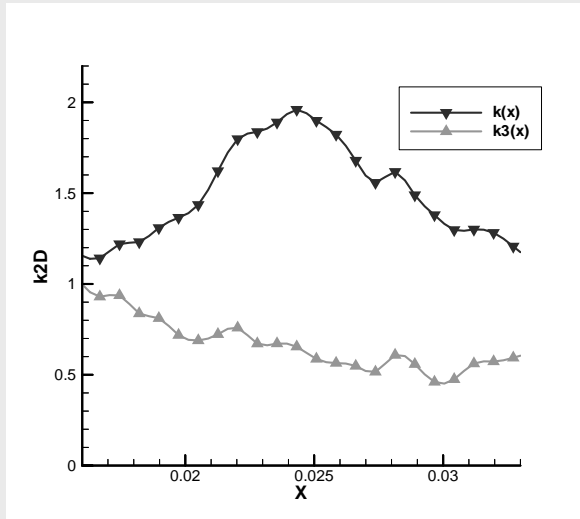
- vortex region S



- We first analyse the flow in the vortex region (S : indicated on figures)

162

→ POD in domain S (vortex region) : The first 3 modes are associated to mean vortex and its displacement



Horizontal profile of the energy of fluctuations.

$$\langle u^2 + v^2 \rangle$$

The profile spans the width of S and goes through the mean vortex centre.

▼, Phase averaged turbulent energy.

▲, fluctuation from the instantaneous projection on the first 3 POD modes.

→ POD in the whole field is not suited to study the jet/vortex interaction because vortex region **contains only 3%** of the total mean kinetic energy of the flow in the whole domain.

→ Goal : From the POD analysis in the vortex region :

Which part of the surrounding signal is correlated with modes or groups of modes ?

See paper : Maurel, S., Borée, J. and Lumley, J. L. (2001). *Journal of Flow, Turbulence and Combustion* 67: 125-136.

Definition of extended modes (1)

* POD analysis in a domain S based on a set of realisations U(X) :

$\Phi^{(n)}(X)$: POD mode ; $\lambda^{(n)}$: Eigenvalue

$U(X) = \sum_{\text{modes}} a^{(n)} \Phi^{(n)}(X)$; $a^{(n)}$: Random coefficients

• Signal $\alpha(X')$ acquired in a domain Ω . α can correspond to velocity, pressure ...

• The extended mode number n is defined by :

$$\Psi_{\alpha}^{(n)}(X') = \frac{\langle a^{(n)} \alpha(X') \rangle}{\lambda^{(n)}}$$

• Note that for X in domain S and if $\alpha=U$, extended modes restrict to POD modes:

$$\Psi_U^{(n)}(X) = \frac{\langle a^{(n)} U(X) \rangle}{\lambda^{(n)}} = \Phi^{(n)}(X)$$

165

Definition of extended modes (2)

* We then define :

$$\alpha_C(X') = \sum_{\text{modes}} a^{(n)} \Psi_{\alpha}^{(n)}(X')$$

$$\alpha_D(X') = \alpha(X') - \alpha_C(X')$$

$$\text{With } \Psi_{\alpha}^{(n)}(X') = \frac{\langle a^{(n)} \alpha(X') \rangle}{\lambda^{(n)}}$$

• Proposition 1 : α_C is the only part of α correlated with U

• Proposition 2 : The part associated with extended mode number (n) is the only part correlated with the projection of the velocity field on mode (n) in S.

• Proposition 3 : $\langle \alpha(X') \alpha(X') \rangle = \langle \alpha_D(X') \alpha_D(X') \rangle + \sum_{\text{modes}} \lambda^{(n)} \langle \Psi_{\alpha}^{(n)}(X') \Psi_{\alpha}^{(n)}(X') \rangle$

166

Definition of extended modes (3)

* Proof of 1 : In fact based on the fact that : $\langle a^{(n)} a^{(p)} \rangle = \delta_{np} \lambda^{(n)}$

For $X \in S$; $X' \in \Omega$

$$* \langle \alpha(X') U(X) \rangle = \left\langle \alpha(X') \sum_n a^{(n)} \Phi^{(n)}(X) \right\rangle = \sum_n \langle a^{(n)} \alpha(X') \rangle \Phi^{(n)}(X)$$

$$\rightarrow \text{Thus } \langle \alpha(X') U(X) \rangle = \sum_n \lambda^{(n)} \Psi_\alpha^{(n)}(X') \Phi^{(n)}(X) \quad (\text{By definition of extended modes})$$

$$* \langle \alpha_C(X') U(X) \rangle = \left\langle \sum_p a^{(p)} \Psi_\alpha^{(p)}(X') \sum_n a^{(n)} \Phi^{(n)}(X) \right\rangle \\ = \sum_n \sum_p \langle a^{(n)} a^{(p)} \rangle \Psi_\alpha^{(p)}(X') \Phi^{(n)}(X)$$

$$\rightarrow \text{Thus } \langle \alpha_C(X') U(X) \rangle = \sum_n \lambda^{(n)} \Psi_\alpha^{(n)}(X') \Phi^{(n)}(X)$$

$$\rightarrow * \text{ Finally } \langle \alpha_D(X') U(X) \rangle = \langle \alpha(X') U(X) \rangle - \langle \alpha_C(X') U(X) \rangle = 0 \quad \text{Proves (1)}$$

167

Definition of extended modes (4)

• Proof of 2 :

The projection of the velocity field on mode (n) in S is : $U_n(X) = a^{(n)} \Phi^{(n)}(X)$

$$* \langle \alpha_C(X') U_n(X) \rangle = \left\langle \sum_p a^{(p)} \Psi_\alpha^{(p)}(X') a^{(n)} \Phi^{(n)}(X) \right\rangle \\ = \sum_p \langle a^{(n)} a^{(p)} \rangle \Psi_\alpha^{(p)}(X') \Phi^{(n)}(X)$$

$$\rightarrow \text{Thus } \langle \alpha_C(X') U_n(X) \rangle = \lambda^{(n)} \Psi_\alpha^{(n)}(X') \Phi^{(n)}(X)$$

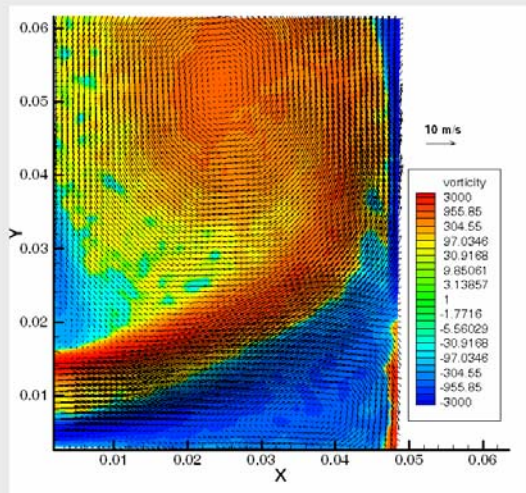
The part associated with extended mode number (n) is the only part correlated with the projection of the velocity field on mode (n) in S.

• Proof of 3 : Easy computation ...

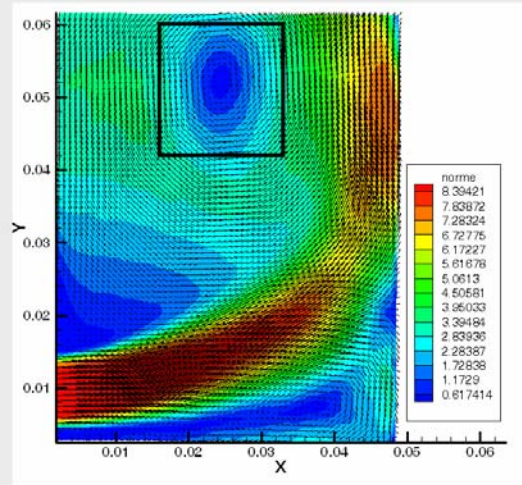
168

Application to the model engine flow (1)

→ Phase averaging :
$$\Psi_U^{(n)}(X') = \sum_{k=1}^N \frac{a_k^{(n)}}{N\lambda^{(n)}} U_k(X')$$



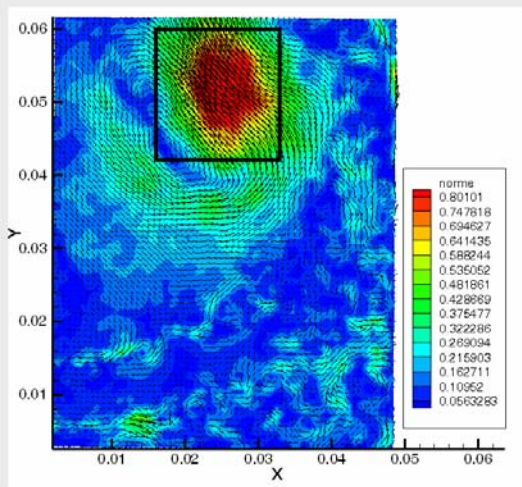
Phase averaged velocity and vorticity (colour levels)



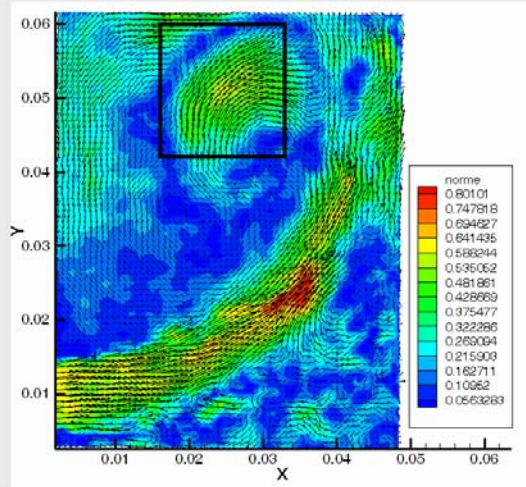
First POD mode (domain S) and Extended mode (exterior).
Color : norm. $\sqrt{\lambda^{(1)}} \Psi_U^{(1)}(X'_{169})$

Application to the model engine flow (1)

→ Extended Mode (3) : link between jet flapping and vortex displacement



Second POD mode (domain S) and Extended mode (exterior).
Color : norm. $\sqrt{\lambda^{(2)}} \Psi_U^{(2)}(X')$



Third POD mode (domain S) and Extended mode (exterior).
Color : norm. $\sqrt{\lambda^{(3)}} \Psi_U^{(3)}(X'_{170})$

→ Extended POD defined and used here to study the Interactions between different regions of the flow having very different contributions to the global mean kinetic energy

→ Easily extended to study for example spatial and temporal interactions of adjacent structures in free shear flows or wall bounded flows

→ Temporal analysis : $\alpha_C(\mathbf{x}', t) = \sum_{\text{modes}} a^{(n)}(t) \Psi_{\alpha}^{(n)}(\mathbf{x}')$

Might be valuable for flow control to educe signature of structures on pressure field for example