



Méthodes de types Runge-Kutta-Galerkin discontinu pour les écoulements multiphasiques compressibles

Vincent PERRIER

Équipe CAGIRE, INRIA Bordeaux Sud-Ouest
LMA, Université de Pau et des Pays de l'Adour



Journées du GDR Calcul, 5-6 Juin 2011



- Travail en collaboration avec Erwin Franquet (LaTEP, Université de Pau et des Pays de l'Adour, et Équipe CAGIRE, INRIA Bordeaux Sud-Ouest)



RKDG pour les
écoulements
multiphasiques
compressibles

V. PERRIER

Pourquoi du Galerkin
discontinu?

Problèmes de
modélisation

Schéma numérique

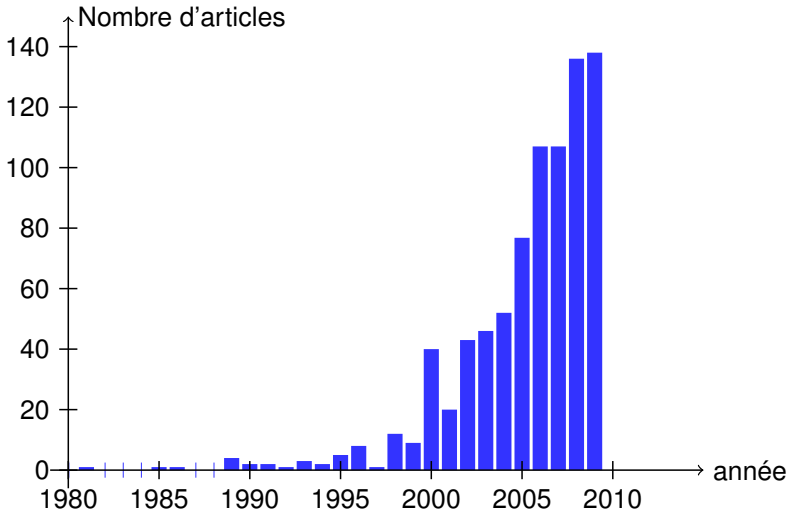
Résultats numériques

Conclusion

- 1 Pourquoi du Galerkin discontinu?
- 2 Problèmes de modélisation
- 3 Schéma numérique
- 4 Résultats numériques



Pourquoi du Galerkin discontinu?





- RANS: équations stationnaires
 - Convergence sur un maillage
 - Raffinement et adaptation du maillage
- LES, DNS: équations instationnaires
 - Advection d'un <vortex>
 - On ne veut pas polluer les termes issus de la modélisation.
 - Raffinement à chaque pas de temps?
- Comment?
 - Erreur de troncature (erreur ponctuelle)
 - Approximation polynomiale par morceaux (erreur par cellule)



On veut

- Travailler en maillages **non structurés**, hybrides.
 - Discrétiser des problèmes de convection (**décentrement** des flux).
 - Avoir un **schéma compact**.
 - Imposer les **conditions aux limites** au sens faible.
-
- Approximations ponctuelles
 - **Différences finies**: maillages structurés, filtres pour la stabilité, stencil étendu, difficultés pour les conditions aux limites
 - Approximations fonctionnelles
 - **Volumes finis** d'ordre élevé: stencil non compact; stabilisation nécessaire pour les chocs.
 - **Galerkin continu**: difficultés pour le décentrement, pour les conditions aux limites.
 - **Galerkin discontinu**: stabilisation nécessaire pour les chocs.



RKDG pour les
écoulements
multiphasiques
compressibles

V. PERRIER

Pourquoi du Galerkin
discontinu?

Problèmes de
modélisation

Schéma numérique

Résultats numériques

Conclusion

Problèmes de modélisation



- On note
 - ρ la masse volumique
 - \mathbf{u} la vitesse
 - E l'énergie totale spécifique

- Système d'Euler

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \operatorname{div}_x(\rho \mathbf{u}) = 0 \\ \partial_t(\rho \mathbf{u}) + \operatorname{div}_x(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} + P \mathbf{I}) = 0 \\ \partial_t(\rho E) + \operatorname{div}_x((\rho E + P) \mathbf{u}) = 0 \end{cases}$$

- Fermeture du système
 - Énergie

$$E = \varepsilon + \frac{|\mathbf{u}|^2}{2}$$

- Le système est fermé par la donnée d'une équation d'état

$$\varepsilon = \varepsilon(P, \rho)$$

- Système **hyperbolique non linéaire**
 - Solutions faibles/entropiques.
 - La **conservativité** est nécessaire.



- On note
 - ρ la masse volumique
 - \mathbf{u} la vitesse
 - E l'énergie totale spécifique

- Système d'Euler

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \operatorname{div}_x(\rho \mathbf{u}) = 0 \\ \partial_t(\rho \mathbf{u}) + \operatorname{div}_x(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} + P\mathbf{I}) = 0 \\ \partial_t(\rho E) + \operatorname{div}_x((\rho E + P)\mathbf{u}) = 0 \end{cases} \implies \partial_t \mathbf{U} + \operatorname{div}_x F(\mathbf{U}) = 0$$

- Fermeture du système
 - Énergie

$$E = \varepsilon + \frac{|\mathbf{u}|^2}{2}$$

- Le système est fermé par la donnée d'une équation d'état

$$\varepsilon = \varepsilon(P, \rho)$$

- Système **hyperbolique non linéaire**
 - Solutions faibles/entropiques.
 - La **conservativité** est nécessaire.



● Modèle de type Baer et Nunziato

$$\partial_t \alpha^{(k)} + \mathbf{u}_I \cdot \nabla \alpha^{(k)} = 0$$

$$\partial_t (\alpha^{(k)} \rho^{(k)}) + \operatorname{div}_x (\alpha^{(k)} \rho^{(k)} \mathbf{u}^{(k)}) = 0$$

$$\partial_t (\alpha^{(k)} \rho^{(k)} \mathbf{u}^{(k)}) + \operatorname{div}_x (\alpha^{(k)} \rho^{(k)} \mathbf{u}^{(k)} \otimes \mathbf{u}^{(k)} + \alpha^{(k)} P^{(k)} \mathbf{I}_d) = P_I \nabla \alpha^{(k)}$$

$$\partial_t (\alpha^{(k)} \rho^{(k)} E^{(k)}) + \operatorname{div}_x (\alpha^{(k)} (\rho^{(k)} E^{(k)} + P^{(k)} \mathbf{u}^{(k)})) = P_I \mathbf{u}_I \cdot \nabla \alpha^{(k)}$$

● Peut modéliser

- les écoulements à interfaces
- les écoulements à gouttes/bulles dispersées (les bulles ou les gouttes sont plus petites que l'échelle de discrétisation)

● Les problèmes sont

- Est-ce que le système est hyperbolique?
- Comment modéliser les termes interfaciaux
- Comment discrétiser les produits non conservatifs?
- Comment monter en ordre?



RKDG pour les écoulements multiphasiques compressibles

V. PERRIER

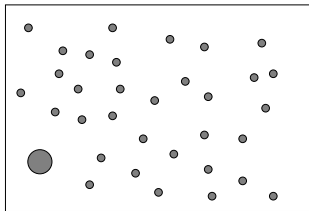
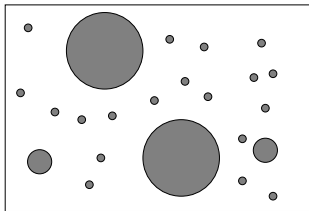
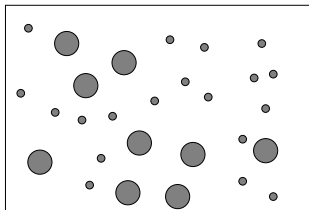
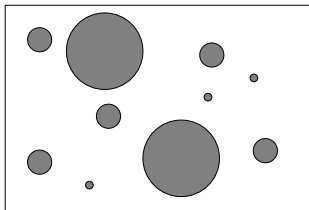
Pourquoi du Galerkin discontinu?

Problèmes de modélisation

Schéma numérique

Résultats numériques

Conclusion





1 Équations pour chaque phase

χ_k : fonction indicatrice du fluide k

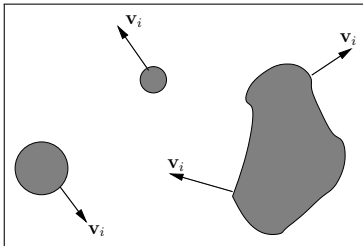
Euler

$$\chi_k (\partial_t \mathbf{U}_k + \text{div}_x \mathbf{F}_k(\mathbf{U}_k)) = 0$$

+ **Équation topologique** sur les interfaces

$$\partial_t \chi_k + \mathbf{v}_i \cdot \nabla \chi_k = 0$$

La vitesse locale d'interface \mathbf{v}_i est définie en résolvant un **problème de Riemann local**.





1 Équations pour chaque phase

χ_k : fonction indicatrice du fluide k

Euler + Équation topologique sur les interfaces

2 Moyenne

- En définissant

$$\alpha_k = \mathbb{E} \{ \chi_k \}$$

$$\alpha_k \rho_k = \mathbb{E} \{ \chi_k \rho_k \}$$

$$\alpha_k \rho_k \mathbf{u}_k = \mathbb{E} \{ \chi_k \rho_k \mathbf{u}_k \}$$

$$\alpha_k \rho_k \mathbf{E}_k = \mathbb{E} \{ \chi_k \rho_k \mathbf{E}_k \}$$

- On trouve le système suivant

$$\partial_t \alpha_k \rho_k + \nabla \cdot (\alpha_k \rho_k \mathbf{u}_k) = \mathbb{E} \{ \rho (\mathbf{u}_k - \mathbf{v}_i) \cdot \nabla \chi_k \}$$

$$\begin{aligned} \partial_t \alpha_k \rho_k \mathbf{u}_k + \nabla \cdot (\alpha_k \rho_k \mathbf{u}_k \otimes \mathbf{u}_k + \alpha_k \mathbf{P}_k) \\ = \mathbb{E} \{ (\rho_k \mathbf{u}_k (\mathbf{u}_k - \mathbf{v}_i) + \mathbf{P}_k) \cdot \nabla \chi_k \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial_t \alpha_k \rho_k \mathbf{E}_k + \nabla \cdot (\alpha_k \rho_k \mathbf{E}_k \mathbf{u}_k + \alpha_k \mathbf{P}_k \mathbf{u}_k) \\ = \mathbb{E} \{ (\rho_k \mathbf{E}_k (\mathbf{u}_k - \mathbf{v}_i) + \mathbf{P}_k \mathbf{u}_k) \cdot \nabla \chi_k \} \end{aligned}$$

$$\partial_t \alpha_k + \mathbb{E} \{ \mathbf{v}_i \cdot \nabla \chi_k \} = 0$$



1 Équations pour chaque phase

χ_k : fonction indicatrice du fluide k

Euler + Équation topologique sur les interfaces

2 Moyenne

Problèmes de fermeture

3 Modélisation

Termes d'ordre 1	Fluctuations
$\mathbb{E} \{ P_k \nabla \chi_k \} = P_I \nabla \alpha_k$	
$\mathbb{E} \{ (P_k \mathbf{u}) \cdot \nabla \chi_k \} = P_I \mathbf{u}_I \nabla \alpha_k$	Termes de relaxation
$\mathbb{E} \{ \mathbf{v}_i \cdot \nabla \chi_k \} = \mathbf{u}_I \nabla \alpha_k$	



1 Équations pour chaque phase

χ_k : fonction indicatrice du fluide k

Euler + Équation topologique sur les interfaces

2 Moyenne

Problèmes de fermeture

3 Modélisation

Modèle à 7 équations: Produits non conservatifs+Problèmes de fermeture



RKDG pour les
écoulements
multiphasiques
compressibles

V. PERRIER

Pourquoi du Galerkin
discontinu?

Problèmes de
modélisation

Schéma numérique

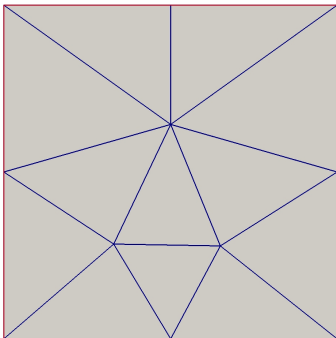
Résultats numériques

Conclusion

Schéma numérique



- On se donne un maillage \mathcal{T}_h



- S_b faces de bord
- S_i faces internes
- \mathbf{n}^S normale à la face S
- \mathbf{n}^{out} normale sortante d'un élément

$$\varphi^R(\mathbf{x}) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0, \varepsilon > 0} \varphi(\mathbf{x} + \varepsilon \mathbf{n}^S) \quad \text{et} \quad \varphi^L(\mathbf{x}) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0, \varepsilon > 0} \varphi(\mathbf{x} - \varepsilon \mathbf{n}^S)$$

$$[[\varphi]](\mathbf{x}) = \varphi^R(\mathbf{x}) - \varphi^L(\mathbf{x}) \quad \text{and} \quad \{\{\varphi\}\}(\mathbf{x}) = \frac{\varphi^R(\mathbf{x}) + \varphi^L(\mathbf{x})}{2}.$$



- On intègre l'équation $\varphi \operatorname{div}_{\mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{u}) = 0$
- \mathbf{u} et φ sont continues dans les mailles, discontinues sur les faces

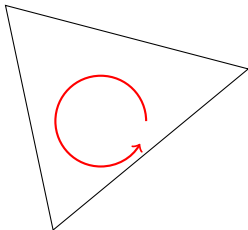
$$\int_{\Omega} \varphi \operatorname{div}_{\mathbf{x}} \mathbf{f}(u) = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \varphi \operatorname{div}_{\mathbf{x}} \mathbf{f}(u) + \sum_{S \in \mathcal{S}_i} \int_S \hat{\varphi}[\mathbf{f}(u)] \cdot \mathbf{n}^S$$

où $\hat{\varphi}$ est le flux numérique pour les fonctions tests

- On intègre l'équation $\varphi \operatorname{div}_{\mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{u}) = 0$
- \mathbf{u} et φ sont continues dans les mailles, discontinues sur les faces

$$\int_{\Omega} \varphi \operatorname{div}_{\mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{u}) = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \varphi \operatorname{div}_{\mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{u}) + \sum_{S \in \mathcal{S}_i} \int_S \hat{\varphi} [[\mathbf{f}(\mathbf{u})]] \cdot \mathbf{n}^S$$

où $\hat{\varphi}$ est le flux numérique pour les fonctions tests



- Intégration par parties

$$\begin{aligned} &= \int_T \operatorname{div}_{\mathbf{x}} (\varphi \mathbf{f}(\mathbf{u})) - \int_T \mathbf{f}(\mathbf{u}) \nabla \varphi \\ &= \int_{\partial T} \varphi \mathbf{f}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n}^{\text{out}} - \int_T \mathbf{f}(\mathbf{u}) \nabla \varphi \\ &= \sum_{S \in \partial T} \int_S \varphi \mathbf{f}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n}^{\text{out}} - \int_T \mathbf{f}(\mathbf{u}) \nabla \varphi \end{aligned}$$



RKDG pour les écoulements multiphasiques compressibles

V. PERRIER

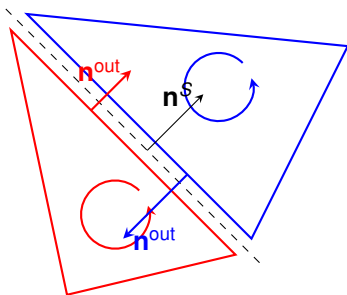
Pourquoi du Galerkin discontinu?

Problèmes de modélisation

Schéma numérique

Résultats numériques

Conclusion



$$\begin{aligned} & \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \sum_{S \in \partial T} \int_S \varphi \mathbf{f}(u) \cdot \mathbf{n}^{\text{out}} \\ &= - \sum_{S \in \mathcal{S}_i} \int_S [\![\varphi \mathbf{f}(u)]\!] \cdot \mathbf{n}^S \\ & \quad + \sum_{S \in \mathcal{S}_b} \int_S \varphi \mathbf{f}(u) \cdot \mathbf{n}^{\text{out}} \end{aligned}$$



RKDG pour les écoulements multiphasiques compressibles

V. PERRIER

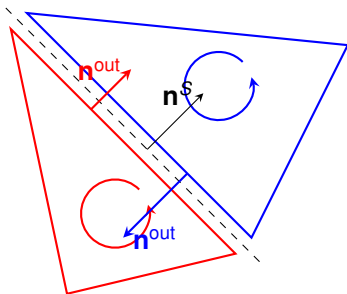
Pourquoi du Galerkin discontinu?

Problèmes de modélisation

Schéma numérique

Résultats numériques

Conclusion



$$\begin{aligned} & \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \sum_{S \in \partial T} \int_S \varphi \mathbf{f}(u) \cdot \mathbf{n}^{\text{out}} \\ &= - \sum_{S \in \mathcal{S}_i} \int_S [[\varphi \mathbf{f}(u)]] \cdot \mathbf{n}^S \\ & \quad + \sum_{S \in \mathcal{S}_b} \int_S \varphi \mathbf{f}(u) \cdot \mathbf{n}^{\text{out}} \end{aligned}$$

$$[[ab]] = \{\{a\}\} [b] + [a] \{\{b\}\}$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \varphi \operatorname{div}_{\mathbf{x}} \mathbf{f}(u) &= - \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \mathbf{f}(u) \nabla \varphi - \sum_{S \in \mathcal{S}_i} \int_S [[\varphi] \{\{ \mathbf{f}(u) \} \}] \cdot \mathbf{n}^S \\ & \quad - \sum_{S \in \mathcal{S}_i} \int_S \{\{ \varphi \} \} [[\mathbf{f}(u)]] \cdot \mathbf{n}^S + \sum_{S \in \mathcal{S}_b} \int_S \varphi \mathbf{f}(u) \cdot \mathbf{n}^{\text{out}} \\ & \quad + \sum_{S \in \mathcal{S}_i} \int_S \hat{\varphi} [[\mathbf{f}(u)]] \cdot \mathbf{n}^S \end{aligned}$$



RKDG pour les écoulements multiphasiques compressibles

V. PERRIER

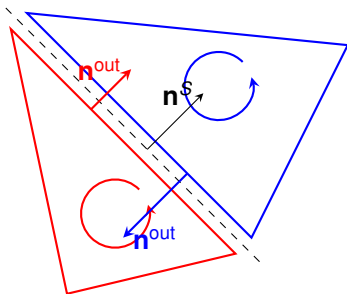
Pourquoi du Galerkin discontinu?

Problèmes de modélisation

Schéma numérique

Résultats numériques

Conclusion



$$\begin{aligned} & \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \sum_{S \in \partial T} \int_S \varphi \mathbf{f}(u) \cdot \mathbf{n}^{\text{out}} \\ &= - \sum_{S \in \mathcal{S}_i} \int_S [[\varphi \mathbf{f}(u)]] \cdot \mathbf{n}^S \\ & \quad + \sum_{S \in \mathcal{S}_b} \int_S \varphi \mathbf{f}(u) \cdot \mathbf{n}^{\text{out}} \end{aligned}$$

$$[[ab]] = \{\{a\}\} [b] + [a] \{\{b\}\}$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \varphi \operatorname{div}_{\mathbf{x}} \mathbf{f}(u) &= - \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \mathbf{f}(u) \nabla \varphi - \sum_{S \in \mathcal{S}_i} \int_S [[\varphi] \{\{ \mathbf{f}(u) \}\}] \cdot \mathbf{n}^S \\ & \quad - \sum_{S \in \mathcal{S}_i} \int_S \{\{ \varphi \}\} [[\mathbf{f}(u)]] \cdot \mathbf{n}^S + \sum_{S \in \mathcal{S}_b} \int_S \varphi \mathbf{f}(u) \cdot \mathbf{n}^{\text{out}} \\ & \quad + \sum_{S \in \mathcal{S}_i} \int_S \hat{\varphi} [[\mathbf{f}(u)]] \cdot \mathbf{n}^S \end{aligned}$$



RKDG pour les écoulements multiphasiques compressibles

V. PERRIER

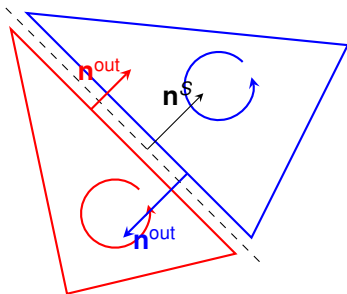
Pourquoi du Galerkin discontinu?

Problèmes de modélisation

Schéma numérique

Résultats numériques

Conclusion



$$\begin{aligned} & \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \sum_{S \in \partial T} \int_S \varphi \mathbf{f}(u) \cdot \mathbf{n}^{\text{out}} \\ &= - \sum_{S \in \mathcal{S}_i} \int_S [[\varphi \mathbf{f}(u)]] \cdot \mathbf{n}^S \\ & \quad + \sum_{S \in \mathcal{S}_b} \int_S \varphi \mathbf{f}(u) \cdot \mathbf{n}^{\text{out}} \end{aligned}$$

$$[[ab]] = \{\{a\}\} [b] + [a] \{\{b\}\}$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \varphi \operatorname{div}_{\mathbf{x}} \mathbf{f}(u) &= - \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \mathbf{f}(u) \nabla \varphi - \sum_{S \in \mathcal{S}_i} \int_S [[\varphi]] \{\{ \mathbf{f}(u) \} \} \cdot \mathbf{n}^S \\ & \quad - \sum_{S \in \mathcal{S}_i} \int_S \{\{ \varphi \} \} [[\mathbf{f}(u)]] \cdot \mathbf{n}^S + \sum_{S \in \mathcal{S}_b} \int_S \varphi \mathbf{f}(u) \cdot \mathbf{n}^{\text{out}} \\ & \quad + \sum_{S \in \mathcal{S}_i} \int_S \hat{\varphi} [[\mathbf{f}(u)]] \cdot \mathbf{n}^S \end{aligned}$$



RKDG pour les écoulements multiphasiques compressibles

V. PERRIER

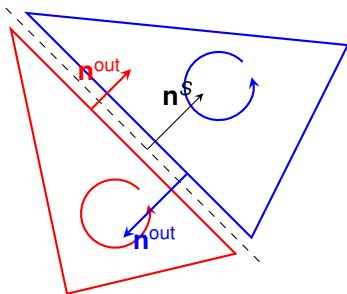
Pourquoi du Galerkin discontinu?

Problèmes de modélisation

Schéma numérique

Résultats numériques

Conclusion



$$\begin{aligned} & \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \sum_{S \in \partial T} \int_S \varphi \mathbf{f}(u) \cdot \mathbf{n}^{\text{out}} \\ &= - \sum_{S \in \mathcal{S}_i} \int_S [[\varphi \mathbf{f}(u)]] \cdot \mathbf{n}^S \\ & \quad + \sum_{S \in \mathcal{S}_b} \int_S \varphi \mathbf{f}(u) \cdot \mathbf{n}^{\text{out}} \end{aligned}$$

$$[[ab]] = \{\{a\}\} [b] + [a] \{\{b\}\}$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \varphi \operatorname{div}_{\mathbf{x}} \mathbf{f}(u) &= - \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \mathbf{f}(u) \nabla \varphi - \sum_{S \in \mathcal{S}_i} \int_S [[\varphi] \{\{ \mathbf{f}(u) \}\}] \cdot \mathbf{n}^S \\ & \quad - \sum_{S \in \mathcal{S}_i} \int_S \{\{ \varphi \}\} [[\mathbf{f}(u)]] \cdot \mathbf{n}^S + \sum_{S \in \mathcal{S}_b} \int_S \varphi \mathbf{f}(u) \cdot \mathbf{n}^{\text{out}} \\ & \quad + \sum_{S \in \mathcal{S}_i} \int_S \hat{\varphi} [[\mathbf{f}(u)]] \cdot \mathbf{n}^S \end{aligned}$$



$$\int_{\Omega} \varphi \operatorname{div}_{\mathbf{x}} \mathbf{f}(u) = - \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \mathbf{f}(u) \nabla \varphi - \sum_{S \in \mathcal{S}_i} \int_S \llbracket \varphi \rrbracket \{ \mathbf{f}(u) \} \cdot \mathbf{n}^S + \sum_{S \in \mathcal{S}_b} \int_S \varphi \mathbf{f}(u) \cdot \mathbf{n}^{\text{out}}$$

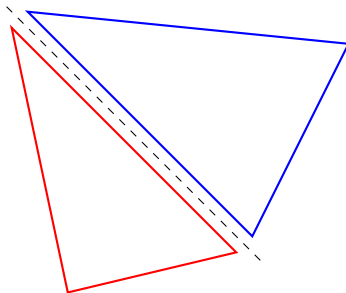
- Pour stabiliser: introduction d'un **flux numérique** (pas forcément linéaire)

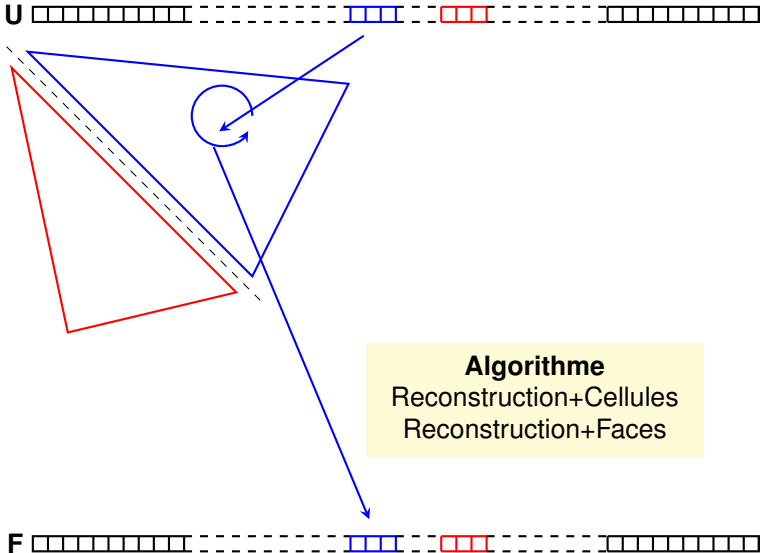
$$\{ \mathbf{f}(u) \} \approx \tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{u}^L, \mathbf{u}^R)$$

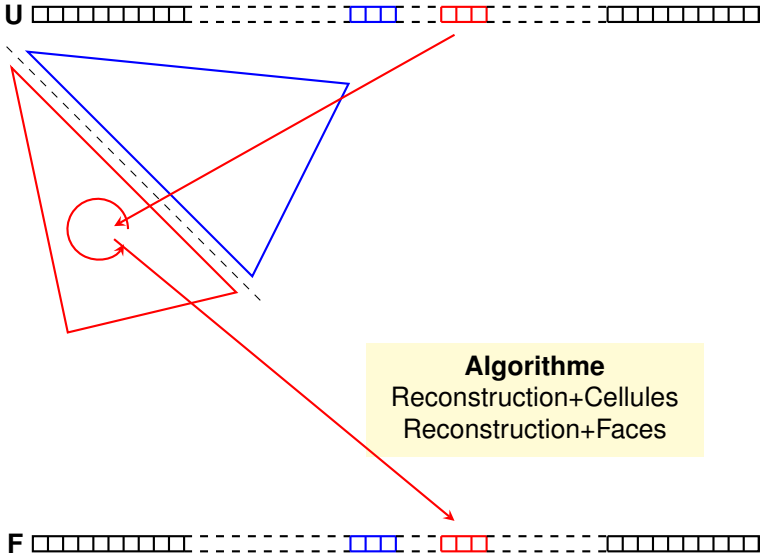
- Pour terminer la discrétisation, **formules de quadrature**
 - **Intégrales de cellules** $\sum_q \omega_q \mathbf{f}(u(x_q)) \nabla \varphi(x_q)$
 - **Intégrales de face** $\sum_q \omega_q \llbracket \varphi(x_q) \rrbracket \tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{u}^L(x_q), \mathbf{u}^R(x_q)) \cdot \mathbf{n}^S$

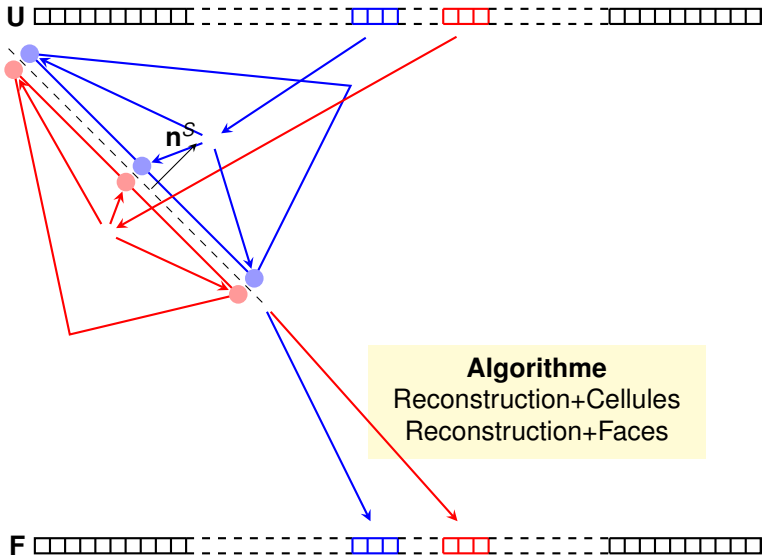
Calcul du **Résidu** de la discrétisation

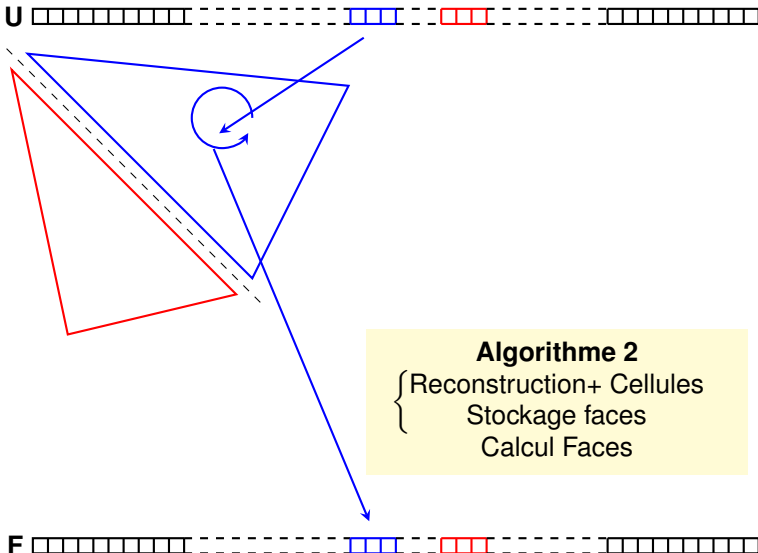
- Boucle sur les **éléments**, les **faces internes**, et les **faces de bord**.



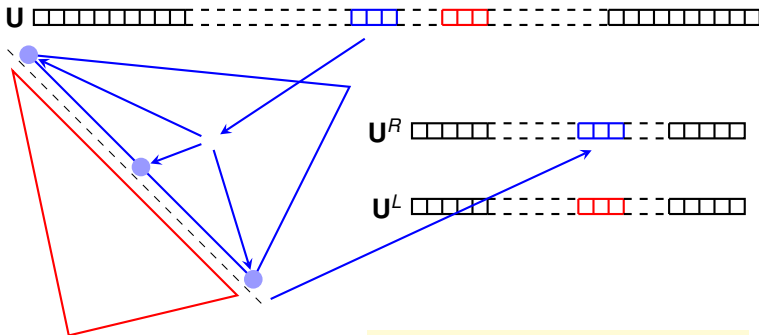






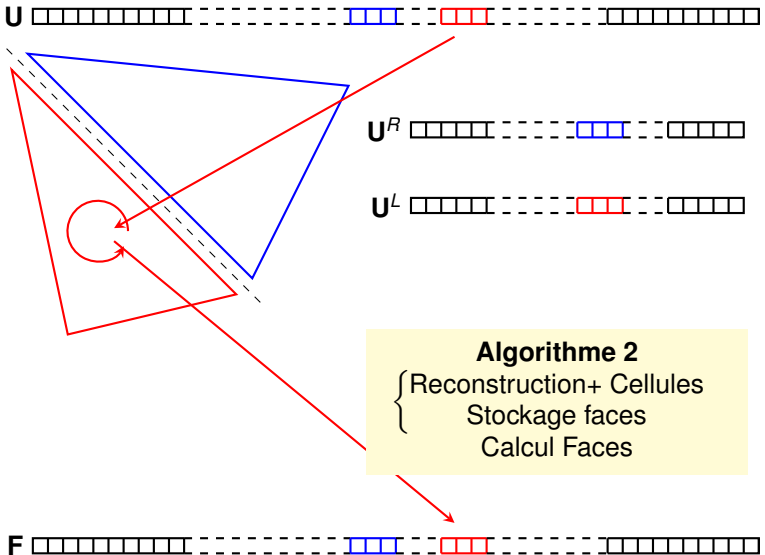


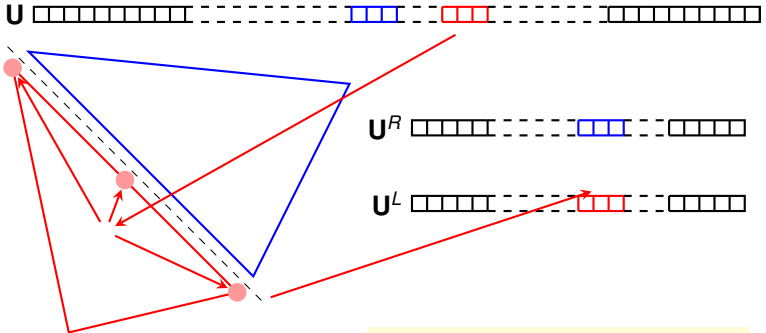
Algorithme 2
 { Reconstruction+ Cellules
 Stockage faces
 Calcul Faces



Algorithme 2
{ Reconstruction+ Cellules
Stockage faces
Calcul Faces

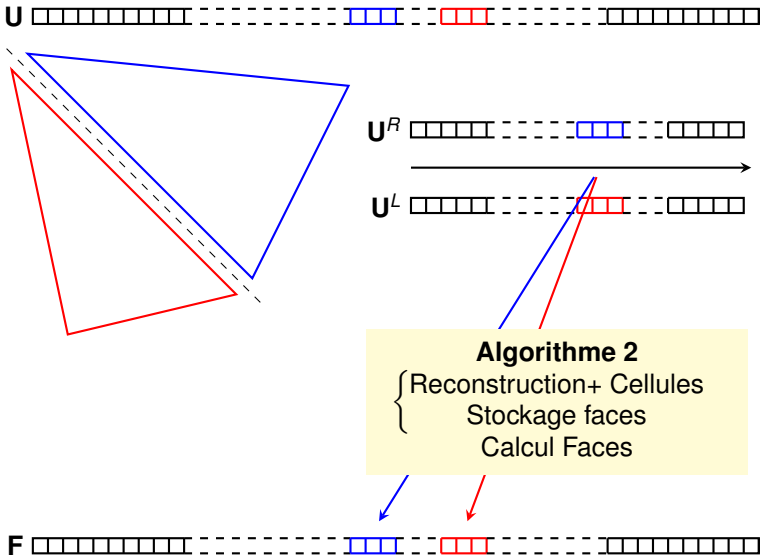


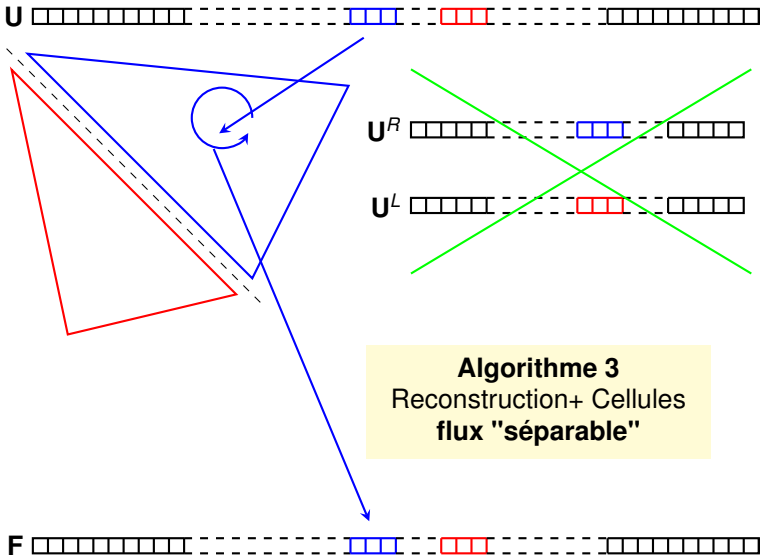


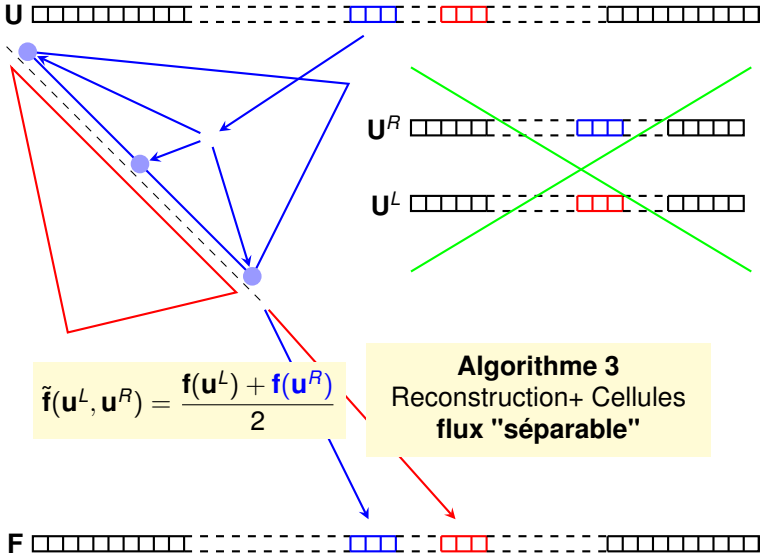


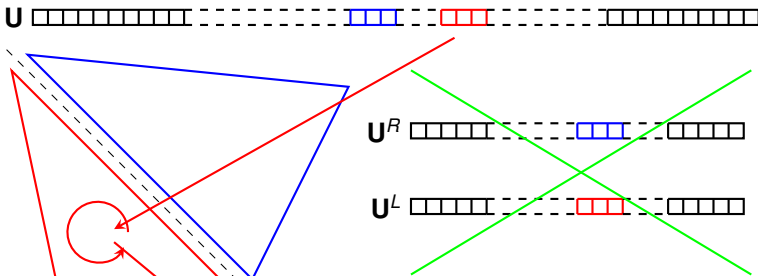
Algorithme 2
 { Reconstruction+ Cellules
 Stockage faces
 Calcul Faces







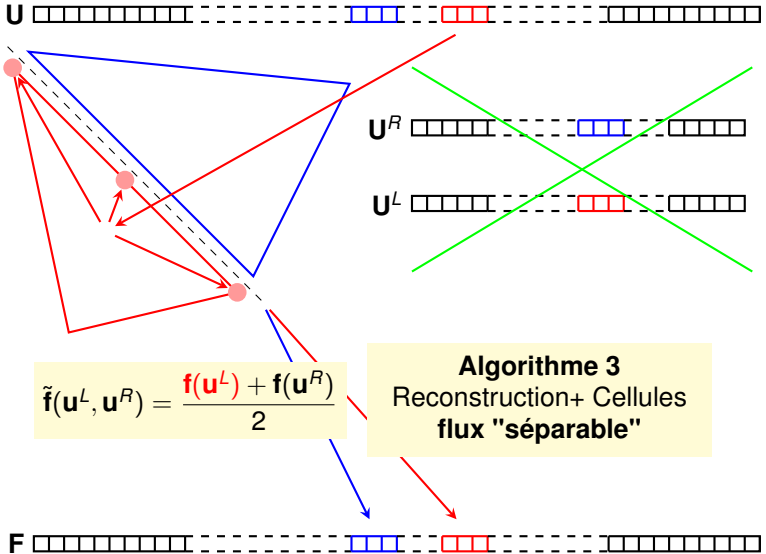




$$\tilde{f}(u^L, u^R) = \frac{f(u^L) + f(u^R)}{2}$$

Algorithme 3
Reconstruction+ Cellules flux "séparable"







RKDG pour les écoulements multiphasiques compressibles

V. PERRIER

Pourquoi du Galerkin discontinu?

Problèmes de modélisation

Schéma numérique

Résultats numériques

Conclusion

- Système conservatif

$$\int_{\Omega} \varphi \operatorname{div}_{\mathbf{x}} \mathbf{f}(u) = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \varphi \operatorname{div}_{\mathbf{x}} \mathbf{f}(u) + \sum_{S \in \mathcal{S}_i} \int_S \varphi [[\mathbf{f}(u)]] \cdot \mathbf{n}^S$$



- Système conservatif

$$\int_{\Omega} \varphi \operatorname{div}_{\mathbf{x}} \mathbf{f}(u) = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \varphi \operatorname{div}_{\mathbf{x}} \mathbf{f}(u) + \sum_{S \in \mathcal{S}_i} \int_S \hat{\varphi} [\mathbf{f}(u)] \cdot \mathbf{n}^S$$

- Système non conservatif

$$\sum_{i=1}^3 a_i(u) \frac{\partial u}{\partial x_i} = 0,$$

Intégration de $\varphi \sum_{i=1}^3 a_i(u) \frac{\partial u}{\partial x_i}$:

$$\int_{\Omega} \varphi \sum_{i=1}^3 a_i(u) \frac{\partial u}{\partial x_i} = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \varphi \sum_{i=1}^3 a_i(u) \frac{\partial u}{\partial x_i} + \sum_{S \in \mathcal{S}_i} \int_S \hat{\varphi} ? \cdot \mathbf{n}^S$$

⇒ Comment définir les sauts à travers les faces?



- Théorie développée dans [DalMaso-Lefloch-Murat 1995]
 - Pour une équation non conservative

$$\partial_t u + \partial_x f(u) + g(u) \partial_x u = 0$$

- un **chemin continu** Φ est tel que

$$u_\varepsilon = \begin{cases} u_L & \text{if } x \in]a, x_d - \varepsilon[\\ \Phi\left(\frac{x - x_d}{\varepsilon}\right) & \text{if } x \in]x_d - \varepsilon, x_d + \varepsilon[\\ u_R & \text{if } x \in]x_d + \varepsilon, b[\end{cases}$$

Alors

$$g(u_\varepsilon) \partial_x u_\varepsilon \rightarrow C \delta_{x_d} \quad \text{avec} \quad C = \int_0^1 g(\Phi(\tau)) \frac{d\Phi}{d\tau}(\tau) d\tau$$



• Formulation

$$\int_{\Omega} \varphi \sum_{i=1}^3 \mathbf{a}_i(\mathbf{u}) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i} = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \varphi \sum_{i=1}^3 \mathbf{a}_i(\mathbf{u}) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i} + \sum_{S \in \mathcal{S}_i \cup \mathcal{S}_b} \int_S \hat{\varphi} \int_0^1 \frac{\partial \Phi}{\partial s}(\mathbf{s}, u^L, u^R) \mathbf{a}(\Phi(\mathbf{s}, u^L, u^R), \cdot) \cdot \mathbf{n}^S$$

• Conservatif si le système est conservatif $\hat{\varphi} = \{\{\varphi\}\}$

$$\int_{\Omega} \varphi \sum_{i=1}^3 \mathbf{a}_i(\mathbf{u}) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i} = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \varphi \sum_{i=1}^3 \mathbf{a}_i(\mathbf{u}) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i} + \sum_{S \in \mathcal{S}_i \cup \mathcal{S}_b} \int_S \{\{\varphi\}\} \int_0^1 \frac{\partial \Phi}{\partial s}(\mathbf{s}, u^L, u^R) \mathbf{a}(\Phi(\mathbf{s}, u^L, u^R), \cdot) \cdot \mathbf{n}^S$$

• Problèmes

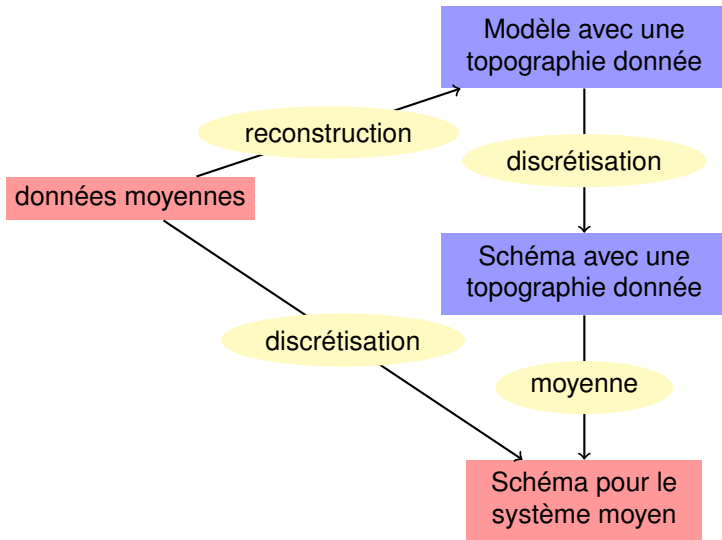
- Pas d'intégration par parties
- Quels **flux numériques** ?



$$\begin{cases} \chi_k (\partial_t \mathbf{U}_k + \operatorname{div}_x \mathbf{F}_k(\mathbf{U}_k)) = 0 \\ \partial_t \chi_k + \sigma \cdot \nabla \chi_k = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \partial_t \mathbb{E} \{ \chi_k \} + \mathbb{E} \{ \sigma \cdot \nabla \chi_k \} = 0 \\ \partial_t \mathbb{E} \{ \chi_k \mathbf{U}_k \} + \operatorname{div}_x \mathbb{E} \{ \chi_k \mathbf{F}(\mathbf{U}_k) \} - \mathbb{E} \{ (\mathbf{F}(\mathbf{U}) - \sigma \mathbf{U}) \cdot \nabla \chi_k \} = 0 \end{cases}$$

- 1 **Équations pour chaque phase**
 χ_k : fonction indicatrice du fluide k
Euler + Équation topologique sur les interfaces
- 2 **Moyenne Problèmes de fermeture**
- 3 **Modélisation**
Modèle à sept équations: **Produits non conservatifs+Problèmes de fermeture**



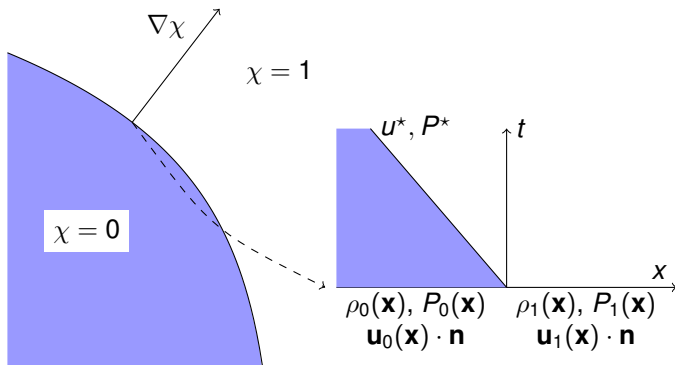


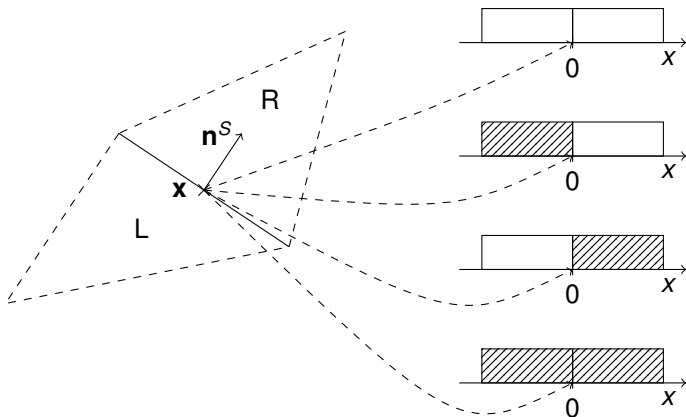
- À partir de la fraction volumique α_k , on reconstruit un processus stochastique χ_k , caractéristique de la phase k .



- À partir de la fraction volumique α_k , on reconstruit un processus stochastique χ_k , caractéristique de la phase k .
- On discrétise

$$\begin{cases} \chi_k (\partial_t \mathbf{U}_k + \operatorname{div}_x \mathbf{F}_k(\mathbf{U}_k)) = 0 \\ \partial_t \chi_k + \mathbf{v}_i \cdot \nabla \chi_k = 0 \end{cases}$$

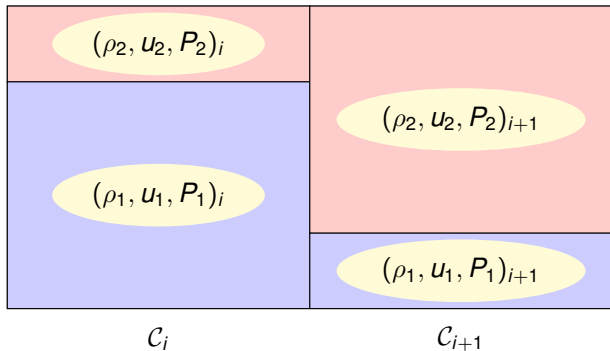




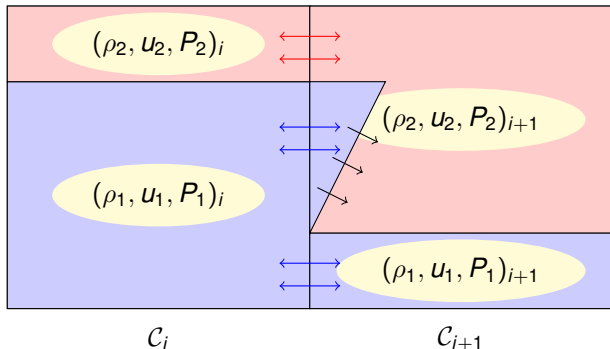


$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \rho_1 \\ u_1 \\ P_1 \\ \alpha_2 \\ \rho_2 \\ u_2 \\ P_2 \end{pmatrix}_i$ C_i	$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \rho_1 \\ u_1 \\ P_1 \\ \alpha_2 \\ \rho_2 \\ u_2 \\ P_2 \end{pmatrix}_{i+1}$ C_{i+1}
--	--

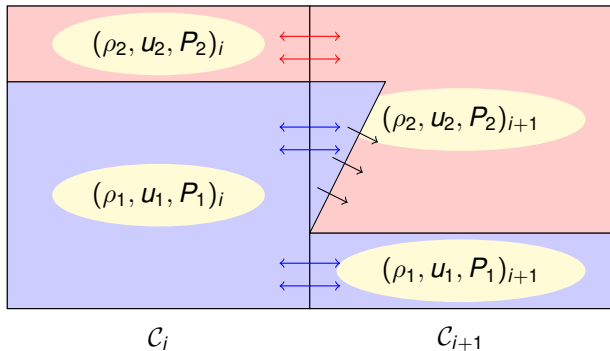
- Dans les cellules i et $i + 1$, chaque cellule a sa propre **fraction volumique**, vitesse, densité, et pression.



- Résolution de quatre problèmes de Riemann: rouge-rouge, bleu-rouge, rouge-bleu, bleu-bleu.



- Intégration des différents problèmes de Riemann.
 - Ajouter ou enlever un flux eulérien $F(\mathbf{U}_i)$ ou $F(\mathbf{U}_i)$ (comme pour un système conservatif).
 - Ajouter sur les deux phases $F(\mathbf{U}) - \sigma \mathbf{U}$ où σ est la vitesse de la surface de contact (partie non conservative du schéma).



- Prendre l'espérance mathématique $\mathbb{E}()$

$$\begin{aligned} \text{Flux Total} = & \mathbb{P}_{i+1/2}(\blacksquare, \blacksquare)F(U_i, U_{i+1}) + \mathbb{P}_{i+1/2}(\blacksquare, \blacksquare)F(U_i, U_{i+1}) \\ & \mathbb{P}_{i+1/2}(\blacksquare, \blacksquare)F(U_i, U_{i+1}) + \mathbb{P}_{i+1/2}(\blacksquare, \blacksquare)F(U_i, U_{i+1}) \end{aligned}$$



- Intégrales de faces sans flux numérique

$$\sum_{S \in S_i} \int_S (\varphi^L - \varphi^R) \{ \text{Partie conservative} \} \mathbf{n}^L$$
$$+ \sum_{S \in S_i} \int_S \{ \varphi \} (\text{Partie non conservative}) \mathbf{n}^L$$

- Intégrales de faces avec flux numériques

$$\sum_{S \in S_i} \int_S (\varphi^L - \varphi^R) \{ \text{Moyennes des flux eulériens} \} \mathbf{n}^S$$
$$+ \sum_{S \in S_i} \int_S \varphi^L (\text{Flux lagrangiens à gauche}) \mathbf{n}^S$$
$$+ \sum_{S \in S_i} \int_S \varphi^R (\text{Flux lagrangiens à droite}) \mathbf{n}^S$$



$$\begin{aligned} & \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K - \mathbb{E} \{ \chi_k \mathbf{F}(\mathbf{U}) \} \nabla \varphi + \varphi (\mathbb{E} \{ (\mathbf{F} - \mathbf{v}_i \mathbf{U}) \nabla \chi_k \}) \\ & + \sum_{S \in \mathcal{S}_i} \int_S (\varphi^L - \varphi^R) \{ \text{Moyennes de flux eulériens} \} \mathbf{n}^S \\ & + \sum_{S \in \mathcal{S}_i} \int_S \varphi^L (\text{Flux lagrangiens à gauche}) \mathbf{n}^S \\ & + \sum_{S \in \mathcal{S}_i} \int_S \varphi^R (\text{Flux lagrangiens à droite}) \mathbf{n}^S \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} & \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K - \mathbb{E} \{ \chi_k \mathbf{F}(\mathbf{U}) \} \nabla \varphi + \varphi (\mathbb{E} \{ (\mathbf{F} - \mathbf{v}_i \mathbf{U}) \nabla \chi_k \}) \\ & + \sum_{S \in \mathcal{S}_i} \int_S (\varphi^L - \varphi^R) \{ \text{Moyennes de flux eulériens} \} \mathbf{n}^S \\ & + \sum_{S \in \mathcal{S}_l} \int_S \varphi^L (\text{Flux lagrangiens à gauche}) \mathbf{n}^S \\ & + \sum_{S \in \mathcal{S}_r} \int_S \varphi^R (\text{Flux lagrangiens à droite}) \mathbf{n}^S \end{aligned}$$

- Pour les intégrales internes: calcul des espérances

$$\mathbb{E} \{ \chi_k \mathbf{F}(\mathbf{U}) \} \nabla \varphi \quad \text{and} \quad \varphi \mathbb{E} \{ (\mathbf{F} - \mathbf{v}_i \mathbf{U}) \nabla \chi_k \}$$

- Pour les moyennes des flux lagrangiens et eulériens

$$\begin{aligned} \text{Flux} = & \mathbb{P}_{i+1/2}(\blacksquare, \blacksquare) F(\mathbf{U}_i, \mathbf{U}_{i+1}) + \mathbb{P}_{i+1/2}(\blacksquare, \blacksquare) F(\mathbf{U}_i, \mathbf{U}_{i+1}) \\ & \mathbb{P}_{i+1/2}(\blacksquare, \blacksquare) F(\mathbf{U}_i, \mathbf{U}_{i+1}) + \mathbb{P}_{i+1/2}(\blacksquare, \blacksquare) F(\mathbf{U}_i, \mathbf{U}_{i+1}) \end{aligned}$$

⇒ Calcul des probabilités $\mathbb{P}(\blacksquare, \blacksquare)$



- À partir de $\alpha_k(\mathbf{x})$, on reconstruit un processus Gaussien $g_{\mathbf{x}}$.

$$\chi_k(\mathbf{x}, \omega) = \frac{1 + \text{sgn}(g_{\mathbf{x}})}{2}$$

- On doit satisfaire

$$\forall \mathbf{x}_0 \quad \text{tel que } \alpha_k \text{ est continu en } \mathbf{x}_0 \quad \mathbb{E} \{ \chi_k(\mathbf{x}_0, \omega) \} = \alpha_k(\mathbf{x}_0)$$

- on note $m_k(\mathbf{x})$
$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-m_k(\mathbf{x})}^{\infty} e^{-g^2/2} dg = \alpha_k(\mathbf{x})$$



- À partir de $\alpha_k(\mathbf{x})$, on reconstruit un processus Gaussien $g_{\mathbf{x}}$.

$$\chi_k(\mathbf{x}, \omega) = \frac{1 + \text{sgn}(g_{\mathbf{x}})}{2}$$

- On doit satisfaire

$$\forall \mathbf{x}_0 \quad \text{tel que } \alpha_k \text{ est continu en } \mathbf{x}_0 \quad \mathbb{E} \{ \chi_k(\mathbf{x}_0, \omega) \} = \alpha_k(\mathbf{x}_0)$$

- on note $m_k(\mathbf{x})$
$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-m_k(\mathbf{x})}^{\infty} e^{-g^2/2} dg = \alpha_k(\mathbf{x})$$
- Hypothèse supplémentaires sur $g_{\mathbf{x}}$

- Variance

$$\forall \mathbf{x} \quad \text{Var}(g_{\mathbf{x}}) = 1$$

- fonction d'autocorrelation

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \quad \text{Cov} \{ g_{\mathbf{x}}, g_{\mathbf{y}} \} = R(\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|)$$

$$(R \rightarrow 1 \text{ when } \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{y})$$



● Probabilités aux faces

- En utilisant le fait que $(g_x, g_{x+\tau})$ est un vecteur Gaussien

$$\mathbb{E} \{ \chi_k(x^-) \chi_k(x + \tau) \} \rightarrow \min(\alpha_k(x^-), \alpha_k(x^+))$$

- d'où

$$\mathbb{E} \{ \chi_k(x^-) (1 - \chi_k(x + \tau)) \} \rightarrow \alpha_k(x^-) - \min(\alpha_k(x^-), \alpha_k(x^+))$$

● Intégrales internes

- But: calculer $\mathbb{E} \{ (\mathbf{F} - \mathbf{v}_i \mathbf{U}) \nabla \chi_k \}$
- On suppose que $R'(0) = 0$ (dérivabilité de g_x)

$$\mathbb{E} \{ (\mathbf{F}(\mathbf{U}) - \sigma \mathbf{U}) \cdot \nabla \chi_1 \} = \begin{pmatrix} 0 \\ -P^*(\nabla \alpha_1) n_x (\nabla \alpha_1) \|\nabla \alpha_1\| \\ -P^*(\nabla \alpha_1) n_y (\nabla \alpha_1) \|\nabla \alpha_1\| \\ -P^*(\nabla \alpha_1) n_z (\nabla \alpha_1) \|\nabla \alpha_1\| \\ -u^*(\nabla \alpha_1) P^*(\nabla \alpha_1) \|\nabla \alpha_1\| \end{pmatrix}$$

- $\mathbf{n}(\nabla \alpha_1)$ direction du gradient de α_1
- $P^*(\nabla \alpha_1)$: la pression à la surface de contact
- $u^*(\nabla \alpha_1)$: la vitesse à la surface de contact



- Limitation seulement dans le cas des interfaces
- On doit limiter les **variables caractéristiques**.
- Pour les cellules n'ayant qu'un fluide, limitation de ses **variables caractéristiques**
- Pour les cellules ayant au moins deux fluides
 - Limitation de la fraction volumique
 - Redéfinition des variables conservatives u

$$\alpha u = \bar{u} \left(\sum \alpha_i \varphi_i \right)$$



RKDG pour les
écoulements
multiphasiques
compressibles

V. PERRIER

Pourquoi du Galerkin
discontinu?

Problèmes de
modélisation

Schéma numérique

Résultats numériques

Conclusion

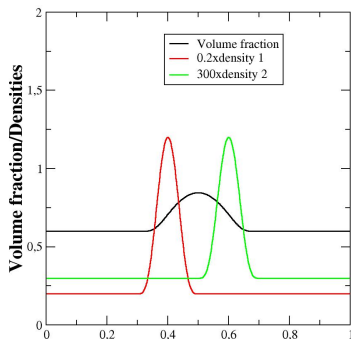
Résultats numériques



- Intégration explicite en temps (SSP).
- Polynômes de Legendre en 1d et de Dubiner en 2d
⇒ la matrice de masse est diagonale
- En 2d, calculs P1 ou calculs avec des solutions régulières.



- domaine de calcul: $[0; 1]$
- conditions aux limites périodiques
- Pression et vitesse uniformes ($10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$).
- Pulse sur la **fraction volumique** et sur les **densités**
- Les deux phase sont des gaz parfaits, de coefficient polytropique 1.4 et 1.648.





Onde entropique diphasique 1d

Resultats: Erreur sur la densité totale

RKDG pour les écoulements multiphasiques compressibles

V. PERRIER

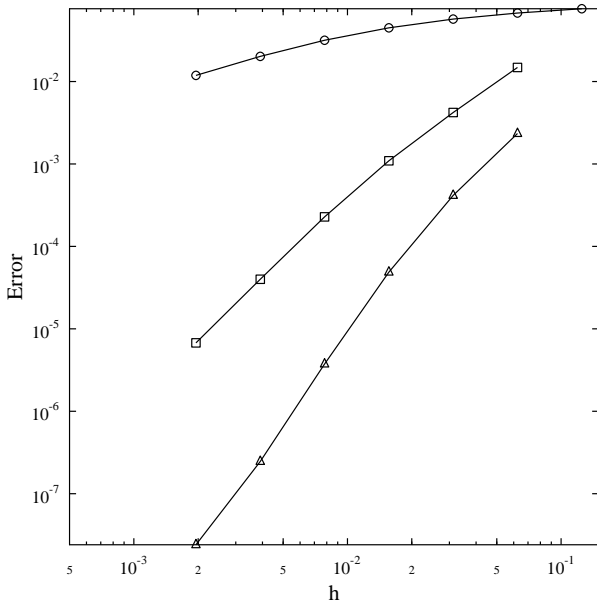
Pourquoi du Galerkin discontinu?

Problèmes de modélisation

Schéma numérique

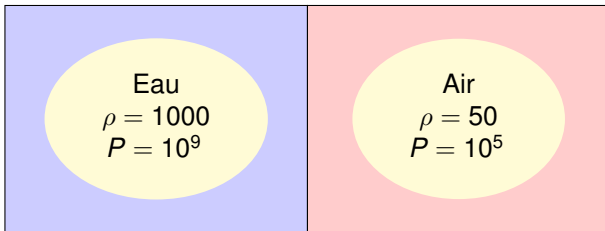
Résultats numériques

Conclusion





- Tube à choc avec eau à haute pression, et air à pression atmosphérique



- Les deux fluides suivent une équation d'état de type stiffened gas

$$\varepsilon(P, \rho) = \frac{P + \gamma P^\infty}{(\gamma - 1)\rho}$$

	Eau	Air
γ	4.4	1.4
P^∞	$6 \cdot 10^8$	0.



Tube à choc monodimensionnel (2/3)

Comparaison dg0/dg1

RKDG pour les écoulements multiphasiques compressibles

V. PERRIER

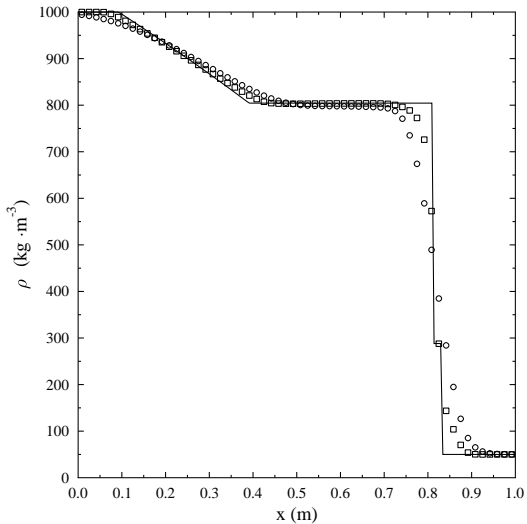
Pourquoi du Galerkin discontinu?

Problèmes de modélisation

Schéma numérique

Résultats numériques

Conclusion





Tube à choc monodimensionnel (3/3)

Ordre de convergence

RKDG pour les écoulements multiphasiques compressibles

V. PERRIER

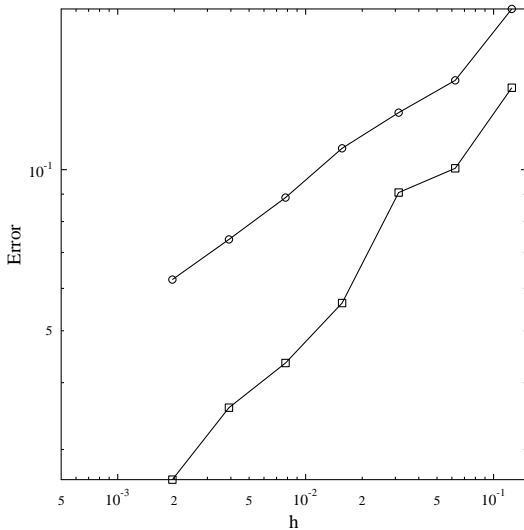
Pourquoi du Galerkin discontinu?

Problèmes de modélisation

Schéma numérique

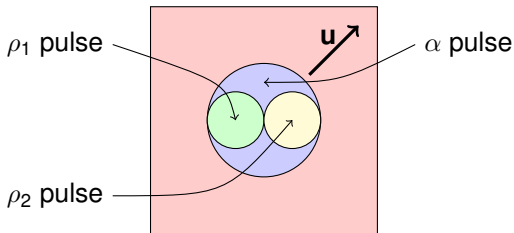
Résultats numériques

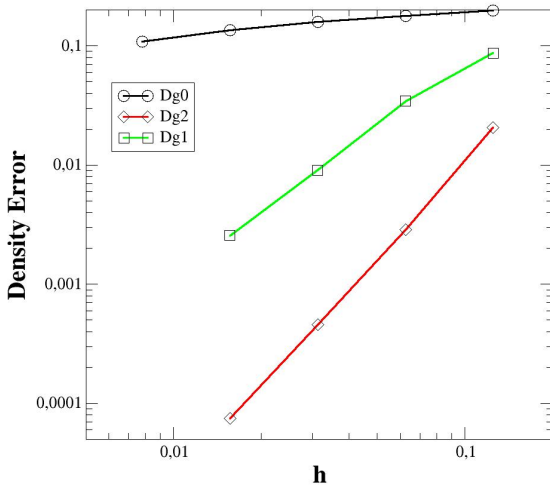
Conclusion





- Domaine de calcul: $[0; 1] \times [0; 1]$
- Conditions aux limites périodiques
- Pression en vitesse uniformes ($P = 1$ Pa), vitesse $((10, 10))$.
- Pulse sur les fractions volumiques et les densités
- Les deux fluides suivent une équation d'état gaz parfait avec coefficient polytropique égal à 1.4 et 1.648.







Onde entropique bidimensionnelle

Coupe 1d de la diagonale

RKDG pour les écoulements multiphasiques compressibles

V. PERRIER

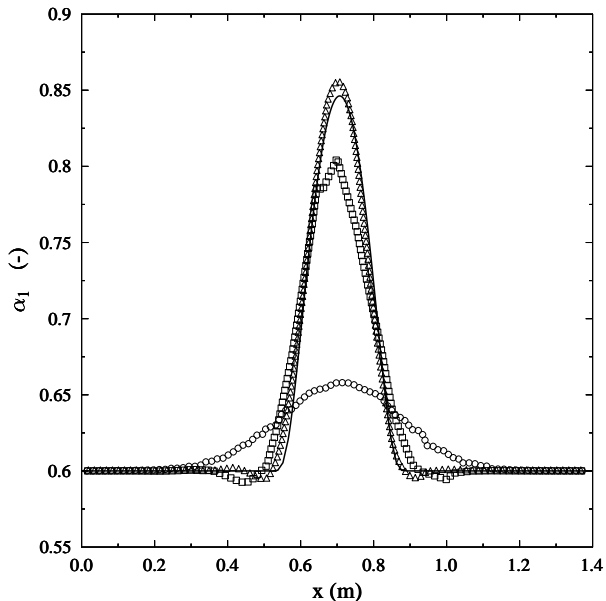
Pourquoi du Galerkin discontinu?

Problèmes de modélisation

Schéma numérique

Résultats numériques

Conclusion





- Domaine de calcul $[-7; 7] \times [-3.5; 3.5]$, **periodique** horizontalement, **écoulement libre** en bas et en haut
- Vitesse orthoradiale, variations radiales des variables thermodynamiques.
- Fraction massique uniforme.
- Les deux fluides sont isentropiques, les pressions sont égales



- Domaine de calcul $[-7; 7] \times [-3.5; 3.5]$, **periodique** horizontalement, **écoulement libre** en bas et en haut
- Vitesse orthoradiale, variations radiales des variables thermodynamiques.
- Fraction massique uniforme.
- Les deux fluides sont isentropiques, les pressions sont égales

$$P = P^\infty \left(1 - \frac{\gamma_1 - 1}{\gamma_1} \frac{\rho_1^\infty}{P^\infty} \frac{\delta^2}{16\pi^2\phi} e^{2\phi(1-r^2)} \right)^{\frac{\gamma_1}{\gamma_1-1}}$$
$$u_1^\theta = -\frac{r\delta}{2\pi} e^{\phi(1-r^2)}$$
$$u_2^\theta = u_1^\theta \sqrt{\frac{\rho_1^\infty}{\rho_2^\infty}} \left(1 - \frac{\gamma_1 - 1}{\gamma_1} \frac{\rho_1^\infty}{P^\infty} \frac{\delta^2}{16\pi^2\phi} e^{2\phi(1-r^2)} \right)^{\frac{\gamma_2 - \gamma_1}{2\gamma_2(\gamma_1 - 1)}}$$



- Domaine de calcul $[-7; 7] \times [-3.5; 3.5]$, **periodique** horizontalement, **écoulement libre** en bas et en haut
- Vitesse orthoradiale, variations radiales des variables thermodynamiques.
- Fraction massique uniforme.
- Les deux fluides sont isentropiques, les pressions sont égales
- On ajoute un écoulement moyen $u = 7$.
- Comparaison à **nombre de degrés de liberté constants**

# Elements	degré polynomial	# degrés de liberté
12314	0	12314
4092	1	12276
2112	2	12672



Vortex bifluide bidimensionnel (2/2)

Coupe selon la ligne $x = 0$ après deux tours

RKDG pour les écoulements multiphasiques compressibles

V. PERRIER

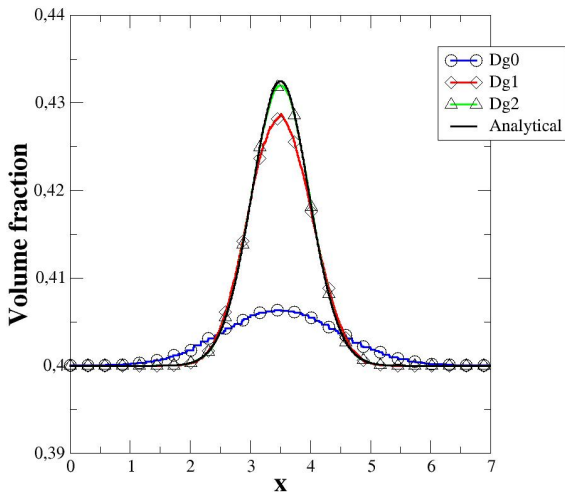
Pourquoi du Galerkin discontinu?

Problèmes de modélisation

Schéma numérique

Résultats numériques

Conclusion





RKDG pour les écoulements multiphasiques compressibles

V. PERRIER

Pourquoi du Galerkin discontinu?

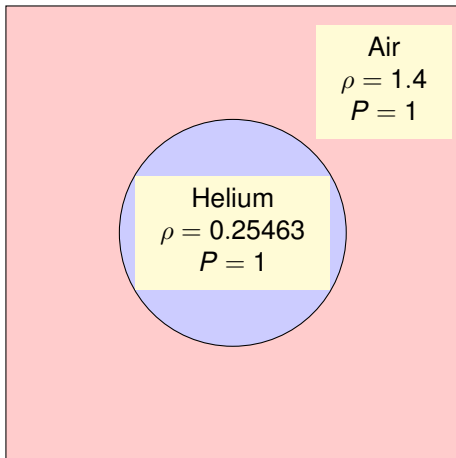
Problèmes de modélisation

Schéma numérique

Résultats numériques

Conclusion

- Vitesse uniforme, $u = -100$.





RKDG pour les
écoulements
multiphasiques
compressibles

V. PERRIER

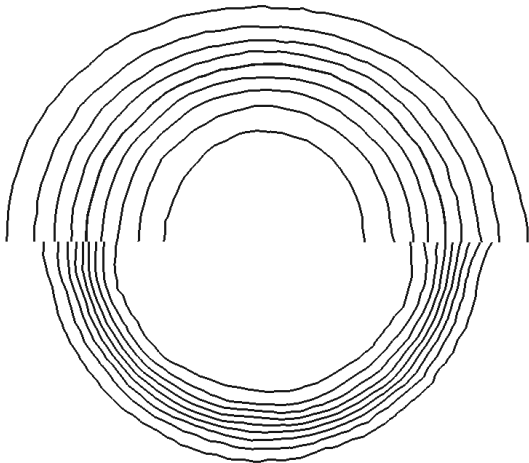
Pourquoi du Galerkin
discontinu?

Problèmes de
modélisation

Schéma numérique

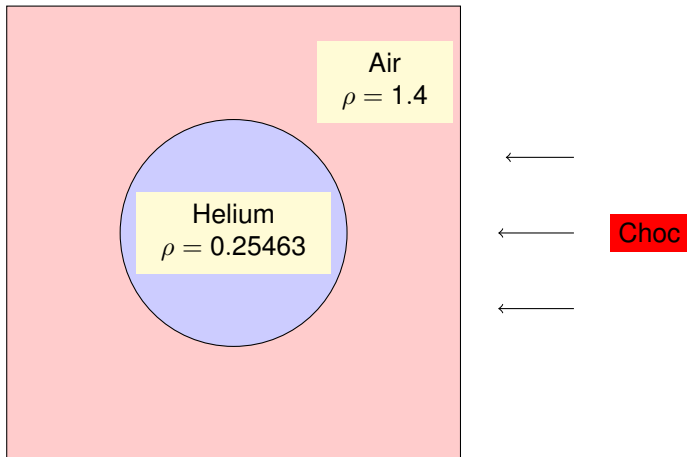
Résultats numériques

Conclusion



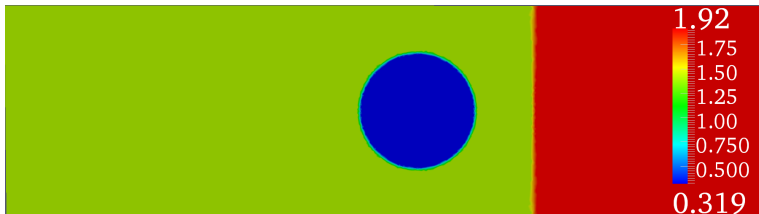


- Pression uniforme, $P = 1$. Deux fluides: Helium ($\gamma = 1.618$) et air ($\gamma = 1.4$).



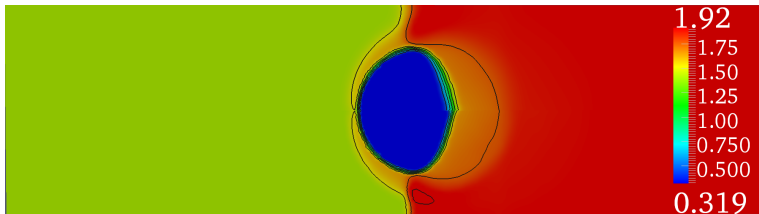


- DG^0 en haut, DG^1 en dessous.



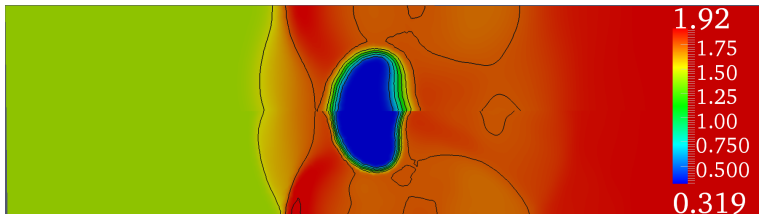


- DG^0 en haut, DG^1 en dessous.



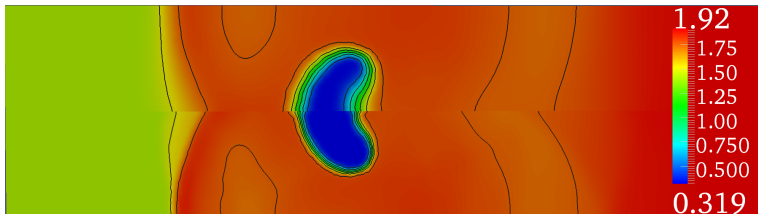


- DG^0 en haut, DG^1 en dessous.



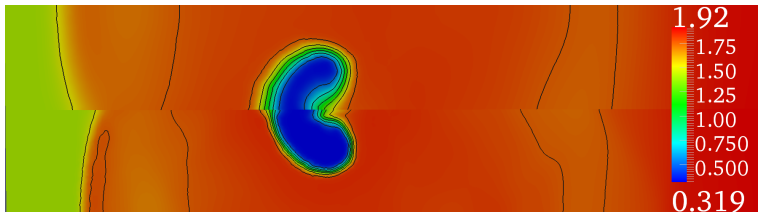


- DG^0 en haut, DG^1 en dessous.



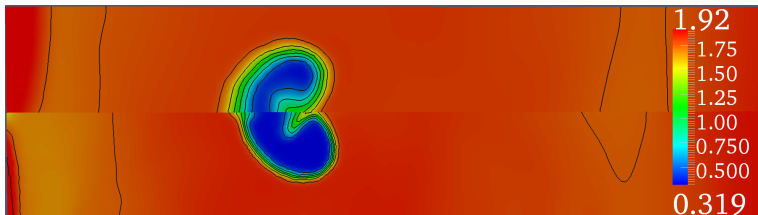


- DG^0 en haut, DG^1 en dessous.





- DG^0 en haut, DG^1 en dessous.





RKDG pour les écoulements multiphasiques compressibles

V. PERRIER

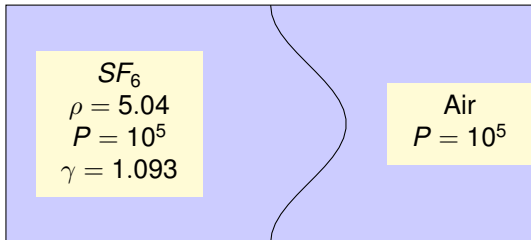
Pourquoi du Galerkin discontinu?

Problèmes de modélisation

Schéma numérique

Résultats numériques

Conclusion



Choc

$Ma = 1.24$



RKDG pour les écoulements multiphasiques compressibles

V. PERRIER

Pourquoi du Galerkin discontinu?

Problèmes de modélisation

Schéma numérique

Résultats numériques

Conclusion





RKDG pour les écoulements multiphasiques compressibles

V. PERRIER

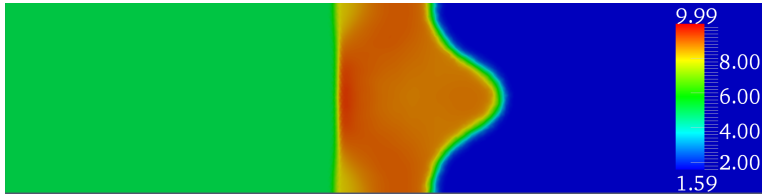
Pourquoi du Galerkin discontinu?

Problèmes de modélisation

Schéma numérique

Résultats numériques

Conclusion





RKDG pour les
écoulements
multiphasiques
compressibles

V. PERRIER

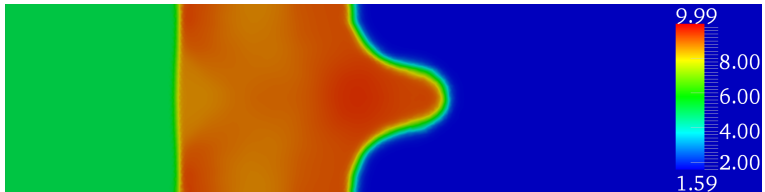
Pourquoi du Galerkin
discontinu?

Problèmes de
modélisation

Schéma numérique

Résultats numériques

Conclusion





RKDG pour les écoulements multiphasiques compressibles

V. PERRIER

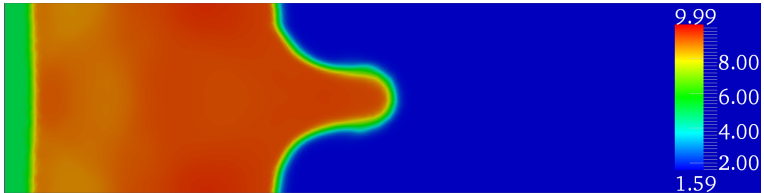
Pourquoi du Galerkin discontinu?

Problèmes de modélisation

Schéma numérique

Résultats numériques

Conclusion





RKDG pour les écoulements multiphasiques compressibles

V. PERRIER

Pourquoi du Galerkin discontinu?

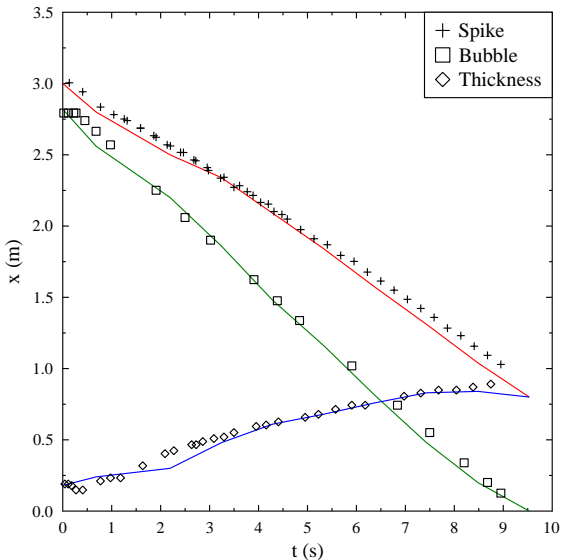
Problèmes de modélisation

Schéma numérique

Résultats numériques

Conclusion







Conclusion



- Formulation Galerkin discontinu pour les systèmes non conservatifs
- Application au système de type Baer et Nunziato.
- discrétisation sans ambiguïté des termes non conservatifs.
- Pour les problèmes à interfaces, le schéma numérique est conservatif pour chacune des phases.
- Une modélisation stochastique précise a permis de trouver un terme de cellules consistant avec les termes de bord.
- Travail en cours: extension en ce moment aux problèmes à interfaces **perméables**.



Rémi Abgrall and Richard Saurel.

Discrete equations for physical and numerical compressible multiphase mixtures.

J. Comput. Phys., 186(2):361–396, 2003.



S. Rhebergen, O. Bokhove, and J. J. W. van der Vegt.

Discontinuous Galerkin finite element methods for hyperbolic nonconservative partial differential equations.

J. Comput. Phys., 227(3):1887–1922, 2008.