Calcul des coefficients d'une formule de Runge–Kutta implicite

$y' = f(y)$ système de n EDOs.

Calcul des coefficients d'une formule de Runge–Kutta implicite

$y' = f(y)$ système de n EDOs.

RK implicite :

$y(h) = y_0 + h\sum_{i=1}^{s} b_i\ k_i$

Les k_i sont solution du système non linéaire :

$k_i = f(y_0 + h\sum_{j=1}^{s} a_{i,j}k_j),\ \ i = 1, s$

Calcul des coefficients d'une formule de Runge–Kutta implicite

$y' = f(y)$ système de n EDOs.

RK implicite :

$y(h) = y_0 + h\sum_{i=1}^{s} b_i\ k_i$
Les k_i sont solution du système non linéaire :
$k_i = f(y_0 + h\sum_{j=1}^{s} a_{i,j}k_j),\ \ i = 1, s$

Comment obtenir une telle formule ?

Collocation

Interpolation polynomiale

$$\frac{dp}{dt}(x) = f(p(x))$$

en s points $x = c_i, i = 1, s$ $c_i \in (0, h)$.

Collocation

Interpolation polynomiale

$$\frac{dp}{dt}(x) = f(p(x))$$

en s points $x = c_i, i = 1, s$ $c_i \in (0, h)$.

Ensuite :

$$a_{i,j} = \int_0^{c_i} \prod_{k \neq j} \frac{x - c_k}{c_j - c_k} dx.$$

et :

$$b_i = \int_0^1 \prod_{k \neq j} \frac{x - c_k}{c_j - c_k} dx.$$

Collocation

Ordre de cette méthode ? le même que l'ordre de la formule de quadrature (moyennant une hypothèse généralement vérifiée).

Collocation

Ordre de cette méthode ? le même que l'ordre de la formule de quadrature (moyennant une hypothèse généralement vérifiée).

Maximiser l'ordre ? $=>$ formules de Gauss !

Collocation

Ordre de cette méthode ? le même que l'ordre de la formule de quadrature (moyennant une hypothèse généralement vérifiée).
Maximiser l'ordre ? => formules de Gauss !

c_k : racines de :

$$l(x) = \frac{d^s}{dx^s} x^s (1-x)^s.$$

(on a fait $h = 1$).

Cette méthode est symplectique ! Adaptée aux systèmes hamiltoniens.