

Numerical computation of Green’s kernel and associated layer potential integrals in helioseismology.

M2 internship 6 Months; INRIA Makutu – University of Pau and Pays de l’Adour.

Supervision: Hélène Barucq, Florian Faucher, Ha Pham (INRIA), Damien Fournier (MPS Göttingen)

Keywords: Green’s kernel; Galerkin boundary element method; Sauter–Schwab quadrature; Hybridizable Discontinuous Galerkin method; Helioseismology.

Contact: Applications with a CV and motivation letter to send to florian.faucher@inria.fr.

The internship takes place in the framework of the ANR-DFG (Franco-German) Project BUTTERFLY, and can possibly lead to Ph.D. funding.

Scientific context and objective We propose an M2 internship in computational helioseismology in the context of project BUTTERFLY which aims to develop numerical tools for use in seismological investigation of surface magnetic activity of Sun and solar-like stars. The objective of the internship is to compute numerically the quiet Sun Green’s kernel and implement numerical integration involving this kernel to be employed in boundary integral equation (BIE) methods. The Green’s kernel forms a key ingredient in forward modeling as well as inversion in helioseismology and asteroseismology which employ seismological techniques to reconstruct the interior structure and dynamics of the Sun and solar-like stars. Radially symmetric standard solar models, such as model S [2], represent the Sun at minimum magnetic activity, called ‘quiet’ Sun. Effects of magnetic activity on solar acoustic modes can be represented as near-surface 3D perturbations in wave speed, and in this way, wave propagation in the Sun is modeled by a time-harmonic scalar wave equation with sound speed coefficient containing these perturbations. Adding these perturbation breaks the radial symmetry of standard models, thus resolution is carried out in 3D but can be prohibitively costly. In the case of compact perturbations, we will construct a more computing-resource frugal alternative, employing a BIE method coupled with Hybridizable Discontinuous Galerkin (HDG) method.

Program The program will be divided into two main phases. All software development and numerical implementation will be performed in the open-source code **hawen** [3] developed in the team Makutu.

Phase 1: Computation of the Green’s kernel exploiting its axis-symmetry, with the following tasks:

- (1.a) Implement and validate the 2.5D scalar equation in software **hawen** which employs HDG method for discretization. Validating test cases include backgrounds with analytic solutions and solar background. The latter comparison is done with the kernel in [4].
- (1.b) Use the validated code to compute the 3D quiet sun Green’s kernel and its derivative for all positions of source and receiver. The 3D problem is reduced to one in the 2D meridional plane by exploiting rotational invariance.

Phase 2: With coupling BIE to HDG in mind, we will consider Galerkin boundary element method rather than collocation method. We will need double layer integrals associated with the kernel and its derivatives. The technical difficulty comes from the weak singularity of the kernel along its diagonal. The tasks here consist of:

- (2.a) Familiarize with existing techniques in Galerkin BEM literature to compute double integrals with weakly singular kernels. We will employ Sauter–Schwab quadrature as our reference, but keep in mind other approaches that provide more precision, cf., e.g., the introduction of [5].
- (2.b) For regular pairs of integrals, we will ‘tensorize’ the quadrature routines in the code **hawen**. For singular pairs, we implement the Sauter–Schwab quadrature, cf., [6, Section 5.2], [7, 1].

Expected skills The applicant must have a solid background in applied mathematics, in particular in partial differential equations; knowledge in boundary element methods and finite elements is recommended. Numerical implementation will be part of the internship, within the open-source platform **hawen**, it is necessary that the applicant is familiar with programming, including parallel computer architecture to launch experiments. In addition, the applicant is expected to review scientific bibliography and write reports/documentation for its progress, hence a good level in English for all aspects of communications is required.

Calcul des noyaux de Green et potentiels de couche pour l'héliosismologie

Stage de M2 de 6 mois; INRIA Makutu – Université de Pau et des Pays de l'Adour.

Supervision: Hélène Barucq, Florian Faucher, Ha Pham (INRIA), Damien Fournier (MPS Göttingen)

Keywords: Équations d'onde; Noyaux de Green; Méthode de Galerkin BEM; Quadrature Sauter–Schwab; HDG; Héliosismologie.

Contact: Candidature avec CV et lettre de motivation à envoyer à florian.faucher@inria.fr.

Le stage s'effectue dans le cadre du projet de recherche franco-allemand ANR-DFG BUTTERFLY, et peut potentiellement mener à un financement de thèse.

Projet Scientifique Ce stage de M2 vise à développer de nouvelles méthodes numériques pour l'héliosismologie dans le cadre du projet ANR-DFG BUTTERFLY entre l'équipe INRIA Makutu et l'institut Max Planck à Göttingen. Ce projet utilise la sismologie pour étudier l'activité magnétique de la surface du Soleil et des étoiles de type solaire. L'objectif de ce stage est de calculer les noyaux de Green pour les ondes harmoniques, et d'implémenter une méthode des équations intégrales de frontière (BIE). Les modèles solaires standards, comme le modèle S [2], sont à symétrie radiale et représentent le Soleil sans tenir compte de l'activité magnétique, on parle alors de "quiet Sun". Les effets de l'activité magnétique sur les modes acoustiques peuvent être représentés par des perturbations 3D proches de la surface. Ces perturbations cassent la symétrie radiale, mais la résolution numérique 3D du Soleil entier peut se montrer trop coûteuse avec des méthodes de discrétisation classiques de type éléments finis. En considérant des perturbations compactes, nous allons développer une alternative numérique frugale, en couplant une méthode des équations intégrales de frontière (BIE) pour la partie 3D avec une méthode d'éléments finis discontinus pour la partie radiale. Le programme de travail est divisé en deux parties; les développements et tests numériques seront réalisés dans le code open-source `hawen` [3] développé dans l'équipe Makutu.

Phase 1 Calcul des noyaux de Green en exploitant la symétrie axiale.

- (1.a) Implémentation et validation du code 2.5D (axisymétrique) pour l'équation scalaire dans le code `hawen` qui emploie la méthode HDG pour la discrétisation. Les cas-tests de validation incluent un milieu homogène (pour avoir une solution analytique), et des modèles de paramètres solaires. Pour ces derniers, nous comparerons avec les résultats de [4].
- (1.b) Calcul des noyaux de Green 3D et de leurs dérivées pour le "quiet Sun". Le problème 3D sera réduit sur un problème 2D le long de l'axe méridien en exploitant l'invariance par rotation. Ce faisant nous utilisons l'outil développé en tâche (1.a).

Phase 2 Nous considérons une méthode d'élément de frontière de Galerkin plutôt qu'une méthode de collocation. Nous aurons besoin des potentiels de double couche associés au noyau et à ses dérivées. La difficulté réside dans la singularité du noyau le long de la diagonale. Les tâches suivantes seront considérées :

- (2.a) Familiarisation avec les techniques existantes de Galerkin BIE dans la littérature et calcul des potentiels de double couche avec faible singularité. Nous emploierons la quadrature de Sauter–Schwab comme référence, tout en regardant les alternatives qui peuvent se montrer plus précises, cf. e.g., l'introduction dans [5].
- (2.b) Pour des paires d'intégrales régulières, nous allons 'tensoriser' la quadrature dans le code `hawen`. Pour les paires singulières, nous implémenterons la quadrature de Sauter–Schwab, [6, Section 5.2], [7, 1].

Qualités Attendues L'étudiante/étudiant doit avoir de solides connaissances en mathématiques appliquées, en particulier sur les équations différentielles. La connaissance des méthodes de discrétisation (éléments finis et/ou Galerkin discontinu) et des éléments de frontière est recommandée. Le stage a également une composante d'implémentation numérique, ce qui nécessite d'être familier avec le codage, voire les aspects de parallélisation de code. Enfin, l'étudiante/étudiant devra lire des papiers scientifiques et produire un rapport d'avancement, il est indispensable d'être à l'aise avec la communication en anglais.

References

- [1] T. BETCKE AND M. W. SCROGGS, *Designing a high-performance boundary element library with opencl and numba*, Computing in Science & Engineering, 23 (2021), pp. 18–28.
- [2] J. CHRISTENSEN-DALSGAARD, W. DÄPPEN, S. AJUKOV, E. ANDERSON, H. ANTIA, S. BASU, V. BATURIN, G. BERTHOMIEU, B. CHABOYER, S. CHITRE, ET AL., *The current state of solar modeling*, Science, 272 (1996), pp. 1286–1292.
- [3] F. FAUCHER, *hawen: time-harmonic wave modeling and inversion using hybridizable discontinuous Galerkin discretization*, Journal of Open Source Software, 6 (2021).
- [4] L. GIZON, H. BARUCQ, M. DURUFLÉ, C. S. HANSON, M. LEGUÈBE, A. C. BIRCH, J. CHABASSIER, D. FOURNIER, T. HOHAGE, AND E. PAPINI, *Computational helioseismology in the frequency domain: acoustic waves in axisymmetric solar models with flows*, Astronomy & Astrophysics, 600 (2017), p. A35.
- [5] H. MONTANELLI, M. AUSSAL, AND H. HADDAR, *Computing weakly singular and near-singular integrals over curved boundary elements*, SIAM Journal on Scientific Computing, 44 (2022), pp. A3728–A3753.
- [6] S. A. SAUTER AND C. SCHWAB, *Boundary element methods*, Springer, 2011.
- [7] W. ŚMIGAJ, T. BETCKE, S. ARRIDGE, J. PHILLIPS, AND M. SCHWEIGER, *Solving boundary integral problems with BEM++*, ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS), 41 (2015), pp. 1–40.