Méthodes multigrilles géométriques et multigrilles algébriques.

Thierry Dumont

Institut Camille Jordan
Université Lyon 1

1. **Méthodes multigrilles géométriques**
   - Heuristique
   - Résultats
2. **Méthodes multigrilles algébriques**
3. **La méthode Y. Notay**

Itération multigrille

$A\,u = F?$

Itération multigrille

$$A\,u = F? \qquad D = F - A\,v$$

Itération multigrille

$$A\,u = F? \qquad D = F - A\,v \qquad u = v + A^{-1}D$$

Itération multigrille

$$A\,u = F? \qquad D = F - A\,v \qquad u = v + A^{-1}D$$

Idée:

- remplacer A^{-1} par une matrice plus petite,
- appliquer récursivement cette méthode.

Cadre d'approximations différences finies

Grilles de pas h, 2 h....n h.

Cadre d'approximations différences finies

Grilles de pas h, 2 h....n h.
Opérateur linéaire: $-\Delta\ u + \lambda\ u = f$.

Cadre d'approximations différences finies

Grilles de pas h, 2 h....n h.
Opérateur linéaire: $-\Delta\ u + \lambda\ u = f$.
Stencil (en dimension 2):

$$\frac{1}{h^2}(-u_{i-1,j} - u_{i,j-1} + 4u_{i,j} - u_{i+1,j} - u_{i,j+1}) + \lambda u_{i,j} = f_{i,j}.$$

Matrice creuse A.

On peut faire une analyse en fréquences spatiales de l'erreur $D = F - AU$:

On peut faire une analyse en fréquences spatiales de l'erreur $D = F - AU$:

$-\Delta\, u + \lambda\, u$. dans (0,1)x(0,1)

Les vecteurs propres $V_{k,l}$ sont (conditions de nullité au bord):

$$V_{k,l}(x_i, y_j) = \sin k\pi x_i \sin l\pi y_j$$

$x_i = ih$, $y_j = jh$.

Ingrédients

1. Lisseur,
2. prolongements et restrictions.

Grandes valeurs de k (ou de l): hautes fréquences.

Lisseur

Exemple: Gauss-Seidel.

$$A = L + U.$$

L: partie triangulaire inférieure de A.

Lisseur

Exemple: Gauss-Seidel.

$$A = L + U.$$

L: partie triangulaire inférieure de A.
L'itération de Gauss-Seidel:

$$L\,X_{n+1} = F - U\,X_n.$$

Lisseur

Exemple: Gauss-Seidel.

$$A = L + U.$$

L: partie triangulaire inférieure de A.
L'itération de Gauss-Seidel:

$$L\,X_{n+1} = F - U\,X_n.$$

Observations:

- lent!
- analyse de Fourier de l'erreur $D = F - AX_n$:
  - décroissance *rapide* des hautes fréquences,
  - décroissance *lente* des basses fréquences.

lisseur.

Morale et algorithme

Après quelques itérations de Gauss-Seidel, l'erreur

$$D = F - A\,X_n$$

peut être bien approchée sur une grille grossière ($2h$).

Morale et algorithme

Après quelques itérations de Gauss-Seidel, l'erreur

$$D = F - A\,X_n$$

peut être bien approchée sur une grille grossière ($2h$).
et

$$U = X_n + V_n$$

avec

$$V_n = A^{-1} D$$

peut être “résolu” approximativement sur la grille de pas plus grossier.

Morale et algorithme

Après quelques itérations de Gauss-Seidel, l'erreur

$$D = F - A\, X_n$$

peut être bien approchée sur une grille grossière ($2h$).
et

$$U = X_n + V_n$$

avec

$$V_n = A^{-1} D$$

peut être “résolu” approximativement sur la grille de pas plus grossier.
Il manque encore des ingrédients.

Restrictions et prolongements

- Restriction: on a D sur la grille de pas h: envoyer D sur la grille de pas $2h$.
- Prolongement: l'opération “inverse”: connaissant un “vecteur” sur la grille de pas $2h$, l'envoyer sur la grille de pas h

Restrictions et prolongements

- Restriction: on a D sur la grille de pas h: envoyer D sur la grille de pas $2h$.
- Prolongement: l'opération "inverse": connaissant un "vecteur" sur la grille de pas $2h$, l'envoyer sur la grille de pas h

Choix possibles:

- Prolongement: interpolation (linéaire).$P_{2h,h}$

Restrictions et prolongements

- Restriction: on a D sur la grille de pas h: envoyer D sur la grille de pas $2h$.
- Prolongement: l'opération "inverse": connaissant un "vecteur" sur la grille de pas $2h$, l'envoyer sur la grille de pas h

Choix possibles:

- Prolongement: interpolation (linéaire).$P_{2h,h}$
- Restriction: $R_{h,2h}$?
  $P_{2h,h}$ est linéaire.

Restrictions et prolongements

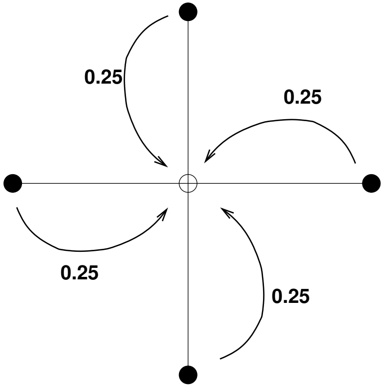
- Restriction: on a D sur la grille de pas h: envoyer D sur la grille de pas $2h$.
- Prolongement: l'opération “inverse”: connaissant un “vecteur” sur la grille de pas $2h$, l'envoyer sur la grille de pas h

Choix possibles:

- Prolongement: interpolation (linéaire).$P_{2h,h}$
- Restriction: $R_{h,2h}$?
  $P_{2h,h}$ est linéaire.
  $R_{h,2h} = P^t_{2h,h}$

$P_{2h,h}$:

$$u_{f;i,j} = \frac{1}{4}(u_{g;i-1,j} + u_{g;i+1,j}) + \frac{1}{4}(u_{g;i,j-1} + u_{g;i,j+1})$$



Méthode 2-grilles géométrique

Une itération $X_n - > X_{n+1}$.

Méthode 2-grilles géométrique

Une itération $X_n - > X_{n+1}$.

1. appliquer quelques itérations de lisseur au système $AX = F$ en partant de X_n

Méthode 2-grilles géométrique

Une itération $X_n - > X_{n+1}$.

1. appliquer quelques itérations de lisseur au système $AX = F$ en partant de X_n
   $- > X_n^l$.

Méthode 2-grilles géométrique

Une itération $X_n - > X_{n+1}$.

1. appliquer quelques itérations de lisseur au système $AX = F$ en partant de X_n
   $- > X_n^l$.
2. $D = F - A\,X_n^l$

Méthode 2-grilles géométrique

Une itération $X_n - > X_{n+1}$.

1. appliquer quelques itérations de lisseur au système $AX = F$ en partant de X_n $- > X_n^l$.
2. $D = F - A\,X_n^l$
3. restreindre D à la grille de pas $2h$

Méthode 2-grilles géométrique

Une itération $X_n - > X_{n+1}$.

1. appliquer quelques itérations de lisseur au système $AX = F$ en partant de X_n $- > X_n^l$.
2. $D = F - A\,X_n^l$
3. restreindre D à la grille de pas $2h$ $D_g = R_{h,2h}D$

Méthode 2-grilles géométrique

Une itération $X_n - > X_{n+1}$.

1. appliquer quelques itérations de lisseur au système $AX = F$ en partant de X_n $- > X_n^l$.
2. $D = F - A\, X_n^l$
3. restreindre D à la grille de pas $2h$ $D_g = R_{h,2h} D$
4. résoudre le système $A_g X_g = D_g$

Méthode 2-grilles géométrique

Une itération $X_n - > X_{n+1}$.

1. appliquer quelques itérations de lisseur au système $AX = F$ en partant de X_n $- > X_n^l$.
2. $D = F - A\, X_n^l$
3. restreindre D à la grille de pas $2h$ $D_g = R_{h,2h} D$
4. résoudre le système $A_g X_g = D_g$
5. prolonger le résultat pour corriger X_n:

Méthode 2-grilles géométrique

Une itération $X_n - > X_{n+1}$.

1. appliquer quelques itérations de lisseur au système $AX = F$ en partant de X_n $- > X_n^l$.
2. $D = F - A\, X_n^l$
3. restreindre D à la grille de pas $2h$ $D_g = R_{h,2h} D$
4. résoudre le système $A_g X_g = D_g$
5. prolonger le résultat pour corriger X_n: $X_{n+1} = X_n - P_{2h,h} X_g$.

Méthode multigrille

Récursivité:

- Résoudre de système grossier (sous pas 4) par la méthode 2-grilles
- Résoudre exactement le système sur grille la plus grossière.

Algorithmes

- V-cycles, W-cycles etc..
- W-cycle: on applique deux itérations de multigrille sur la grille grossière.
- On utilise souvent les méthodes multigrilles comme préconditioneur d'une méthode de type Krylov.
- ....

Convergence

Résultats fins par analyse de Fourier.

Convergence

Résultats fins par analyse de Fourier.

$$q_n = \frac{||F - A\,X_{n+1}||}{||F - A\,X_n||}$$

Convergence

Résultats fins par analyse de Fourier.

$$q_n = \frac{||F - A\,X_{n+1}||}{||F - A\,X_n||}$$

La vitesse de convergence est indépendante de h

$q = max(q_n)$ est indépendant de h.
$O(N \log \varepsilon)$ opérations pour résoudre un système de taille N avec une précision ε.

difficultés..

- programmation délicate,
- coûts cachés
- méthodes pratiquement limitées aux grilles uniformes et structurées.
- parallélisation difficile.

Généralisation du multigrille géométrique

Mutigrille géométrique: seulement adapté aux maillages structurés.

Généralisation du multigrille géométrique

Mutigrille géométrique: seulement adapté aux maillages structurés.
Comment généraliser aux matrices “quelconques”?

- définir une suite de matrices de taille n, $n/2$ ... $n/2^p$, $A_1, A_2, ...A_p$,
- un lisseur
- des prolongements et des restrictions entre IR^n et $IR^{n/2}$.

- définir une suite de matrices de taille n, $n/2$ ... $n/2^p$, $A_1, A_2, ...A_p$,
- un lisseur
- des prolongements et des restrictions entre IR^n et $IR^{n/2}$.

Heuristique:

singer le multigrille géométrique quand les méthodes coïncident (par exemple sur des grilles uniformes et structurées.

Y. Notay: an aggregation-based algebraic multigrid method

Ingrédients

- restriction par agrégation,
- “double pairwise coarsening”,
- utilisée comme préconditioneur.

restriction par agrégation

- On définit une partition de l'ensemble des inconnues en sous ensembles $G_j, \quad j = 1, k$,

restriction par agrégation

- On définit une partition de l'ensemble des inconnues en sous ensembles $G_j, \quad j = 1, k$,
- la matrice de prolongement P, avec:
  - $P_{ij} = 1$ si $i \in G_j$,
  - $P_{ij} = 0$ sinon.

restriction par agrégation

- On définit une partition de l'ensemble des inconnues en sous ensembles $G_j, \quad j = 1, k$,
- la matrice de prolongement P, avec:
  - $P_{ij} = 1$ si $i \in G_j$,
  - $P_{ij} = 0$ sinon.
- matrice sur la grille grossière: $A_g = P^t A P$

restriction par agrégation

- On définit une partition de l'ensemble des inconnues en sous ensembles $G_j, \quad j = 1, k$,
- la matrice de prolongement P, avec:
  - $P_{ij} = 1$ si $i \in G_j$,
  - $P_{ij} = 0$ sinon.
- matrice sur la grille grossière: $A_g = P^t AP$

A_g est particulièrement facile à calculer,

restriction par agrégation

- On définit une partition de l'ensemble des inconnues en sous ensembles $G_j, \quad j = 1, k$,
- la matrice de prolongement P, avec:
  - $P_{ij} = 1$ si $i \in G_j$,
  - $P_{ij} = 0$ sinon.
- matrice sur la grille grossière: $A_g = P^t AP$

A_g est particulièrement facile à calculer,
Son ordre est égal au nombre de G_j.

Il reste à définir les sous ensembles G_j.

Double pairwise coarsening

Cas de M-Matrices ($a_{i,i} > 0,\ a_{i,j} < 0$)...

Double pairwise coarsening

Cas de M-Matrices ($a_{i,i} > 0,\ a_{i,j} < 0$)...
On a en moyenne pour chaque i :

$$\sum_{j \neq i} \frac{|a_{ij}|}{aii} \frac{(e_i - e_j)^2}{e_i^2} << 1$$

avec les lisseurs classiques (GS)

L'erreur lisse varie lentement dans la direction des plus fortes connections négatives, c.a.d là où $\frac{|a_{ij}|}{aii}$ est grand.

Double pairwise coarsening

- regrouper ensemble les nœuds qui ont les plus fortes connections négatives,

Double pairwise coarsening

- regrouper ensemble les nœuds qui ont les plus fortes connections négatives,
- Notay: réitérer 2 fois ce processus (Double pairwise coarsening).

Double pairwise coarsening

- regrouper ensemble les nœuds qui ont les plus fortes connections négatives,
- Notay: réitérer 2 fois ce processus (Double pairwise coarsening).
- en moyenne la taille des matrices successives diminue dans un rapport 4
- quelques astuces supplémentaires... lire le papier!

Utilisation comme préconditioneur du Gradient Conjugué (ou de GMRES, ou...)

Chaque application du préconditioneur est une résolution inexacte d'un système linéaire

Utilisation comme préconditioneur du Gradient Conjugué (ou de GMRES, ou...)

Chaque application du préconditioneur est une résolution inexacte d'un système linéaire dans le cas du GC, on peut perdre l'orthogonalité des vecteurs successifs: il faut donc mieux utiliser FGC (reorthogonalisation a chaque pas, à la manière de GMRES).

Parallélisation et implémentation

- Utilisation de la méthode pour des grilles pas trop grossières, puis utilisation d'une méthode directe (MUMPS, parallélisée) pour la grille grossière.

Parallélisation et implémentation

- Utilisation de la méthode pour des grilles pas trop grossières, puis utilisation d'une méthode directe (MUMPS, parallélisée) pour la grille grossière.
- Chaque processeur se voit affecté un bloc de lignes (utilisation d'un outil comme (par)metis)).

Parallélisation et implémentation

- Utilisation de la méthode pour des grilles pas trop grossières, puis utilisation d'une méthode directe (MUMPS, parallélisée) pour la grille grossière.
- Chaque processeur se voit affecté un bloc de lignes (utilisation d'un outil comme (par)metis)).
- Fortran 9x.

Utilisation et performances

Boite noire!

Utilisation et performances

Boite noire!

Performances: cf. papier de Y. Notay.

Note: très faible empreinte mémoire! environ 3 x taille `a` (tableau des termes non nuls de la matrice fine).

Utilisation et performances

Boite noire!

Performances: cf. papier de Y. Notay.

Note: très faible empreinte mémoire! environ 3 x taille `a` (tableau des termes non nuls de la matrice fine).

Disponible sur la page web de l'auteur:

`http://homepages.ulb.ac.be/~ynotay/`