Résolution de systèmes d'équations différentielles ordinaires non raides et raides (partie 1). Méthodes de Runge-Kutta explicites.

S. Descombes [2] **T. Dumont** [1]
V. Louvet [1] **M. Massot** [3]

[1] Institut Camille Jordan - Université Claude Bernard Lyon 1
[2] Laboratoire J.A. Dieudonné, Université de Nice-Sophia Antipolis
[3] Laboratoire EM2C - Ecole Centrale Paris

Ecole d'automne d'informatique scientifique

Plan

Plan

Cadre général d'une équation différentielle ordinaire

On cherche à résoudre une équation différentielle ordinaire de la forme

$$y' = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0,$$

y étant un vecteur de $\mathbb{R}^n$ et f une fonction de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. On suppose avoir toute la régularité possible sur la solution.

- On découpe l'intervalle sur lequel on veut résoudre l'équation différentielle,
- On cherche ensuite comment calculer en un point de cet intervalle une valeur approchée de la solution.

Cadre général d'une équation différentielle ordinaire

On cherche à résoudre une équation différentielle ordinaire de la forme

$$y' = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0,$$

y étant un vecteur de $\mathbb{R}^n$ et f une fonction de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. On suppose avoir toute la régularité possible sur la solution.

- On découpe l'intervalle sur lequel on veut résoudre l'équation différentielle,
- On cherche ensuite comment calculer en un point de cet intervalle une valeur approchée de la solution.

Cadre général d'une équation différentielle ordinaire

On cherche à résoudre une équation différentielle ordinaire de la forme

$$y' = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0,$$

y étant un vecteur de $\mathbb{R}^n$ et f une fonction de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. On suppose avoir toute la régularité possible sur la solution.

- On découpe l'intervalle sur lequel on veut résoudre l'équation différentielle,
- On cherche ensuite comment calculer en un point de cet intervalle une valeur approchée de la solution.

Cadre général d'une équation différentielle ordinaire

- Les ressources de calcul n'ont pas toujours été celles que nous avons maintenant -> Schémas à un pas
- Schémas explicites !!

Cadre général d'une équation différentielle ordinaire

- Les ressources de calcul n'ont pas toujours été celles que nous avons maintenant -> Schémas à un pas
- Schémas explicites !!

Plan

Au fil de l'histoire

- Méthode d'Euler (1768)

$$y_{n+1} = y_n + h_n f(t_n, y_n)$$

- Pour obtenir une meilleure approximation, il faut se demander comment approcher une intégrale de manière précise....
- Méthode de Runge (1895)

$$y_{n+1} = y_n + h_n f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2} f(t_n, y_n)\right)$$

Au fil de l'histoire

- Méthode d'Euler (1768)

$$y_{n+1} = y_n + h_n f(t_n, y_n)$$

- Pour obtenir une meilleure approximation, il faut se demander comment approcher une intégrale de manière précise....
- Méthode de Runge (1895)

$$y_{n+1} = y_n + h_n f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2} f(t_n, y_n)\right)$$

Au fil de l'histoire

- Méthode d'Euler (1768)

$$y_{n+1} = y_n + h_n f(t_n, y_n)$$

- Pour obtenir une meilleure approximation, il faut se demander comment approcher une intégrale de manière précise....
- Méthode de Runge (1895)

$$y_{n+1} = y_n + h_n f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2} f(t_n, y_n)\right)$$

Au fil de l'histoire

- Méthode de Heune (1900), on pose

$$k = f\left(t_n + \frac{h}{3}, y_n + \frac{h}{3} f(t_n, y_n)\right),$$

alors

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h_n}{4}\left(f(t_n, y_n) + 3f\left(t_n + \frac{2h}{3}, y_n + \frac{2h}{3}k\right)\right).$$

- Procédé qui se généralise, les méthodes de Runge-Kutta sont nées...

Au fil de l'histoire

- Méthode de Heune (1900), on pose

$$k = f\left(t_n + \frac{h}{3}, y_n + \frac{h}{3} f(t_n, y_n)\right),$$

alors

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h_n}{4}\left(f(t_n, y_n) + 3f\left(t_n + \frac{2h}{3}, y_n + \frac{2h}{3}k\right)\right).$$

- Procédé qui se généralise, les méthodes de Runge-Kutta sont nées...

Au fil de l'histoire

Kutta (1901) :
Une méthodes de Runge-Kutta à s étages est donnée par (on simplifie en écrivant la première itération)

$$
\begin{aligned}
k_1 &= f(t_0, y_0),\\
k_2 &= f(t_0 + c_2 h, y_0 + h a_{21} k_1),\\
k_3 &= f(t_0 + c_3 h, y_0 + h a_{31} k_1 + h a_{32} k_2),\\
&\dots\\
k_s &= f(t_0 + c_s h, y_0 + h a_{s1} k_1 + h a_{s,s-1} k_{s-1}),\\
y_1 &= y_0 + h(b_1 k_1 + \cdots b_s k_s).
\end{aligned}
$$

Ecriture sous forme d'un tableau !

Au fil de l'histoire

Méthode de Heune

$$
\begin{array}{c|ccc}
0 & & & \\
1/3 & 1/3 & & \\
2/3 & 0 & 2/3 & \\
\hline
 & 1/4 & 0 & 3/4
\end{array}
$$

"La" méthode de Runge-Kutta

$$
\begin{array}{c|cccc}
0 & & & & \\
1/2 & 1/2 & & & \\
1/2 & 0 & 1/2 & & \\
1 & 0 & 0 & 1 & \\
\hline
 & 1/6 & 2/6 & 2/6 & 1/6
\end{array}
$$

Au fil de l'histoire

Méthode de Heune

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ 1/3 & 1/3 & & \\ 2/3 & 0 & 2/3 & \\ \hline & 1/4 & 0 & 3/4 \end{array}$$

"La" méthode de Runge-Kutta

$$\begin{array}{c|cccc} 0 & & & & \\ 1/2 & 1/2 & & & \\ 1/2 & 0 & 1/2 & & \\ 1 & 0 & 0 & 1 & \\ \hline & 1/6 & 2/6 & 2/6 & 1/6 \end{array}$$

Définition

On suppose le pas constant égal à h.
On dit qu'une méthode de Runge-Kutta est d'ordre p si, pour chaque problème $y' = f(t, y)$, $y(t_0) = y_0$, l'erreur, après un pas, satisfait pour h petit tendant vers 0,

$$y_1 - y(t_0 + h) = \mathcal{O}(h^{p+1})$$

Le terme en rouge s'appelle l'erreur locale.

Exemple : La méthode d'Euler est d'ordre 1, "la" méthode de Runge-Kutta est d'ordre 4. On aime pour un ordre fixé, choisir la méthode qui fait le moins d'évaluations...

Définition

On suppose le pas constant égal à h.
On dit qu'une méthode de Runge-Kutta est d'ordre p si, pour chaque problème $y' = f(t, y)$, $y(t_0) = y_0$, l'erreur, après un pas, satisfait pour h petit tendant vers 0,

$$y_1 - y(t_0 + h) = \mathcal{O}(h^{p+1})$$

Le terme en rouge s'appelle l'erreur locale.

Exemple : La méthode d'Euler est d'ordre 1, "la" méthode de Runge-Kutta est d'ordre 4. On aime pour un ordre fixé, choisir la méthode qui fait le moins d'évaluations...

Résultat

Si f satisfait une conditon de Lipschitz uniformément par rapport à la deuxième variable dans un voisinage de la solution de $y' = f(t, y)$ alors on a une estimation de la forme

$$\|y(t_n) - y_n\| \leq Ch^p.$$

Pas de temps variable

Un calcul à pas constants est en général inefficace. L'idée est de choisir les pas afin que l'erreur locale soit partout environ égale à une tolérance *Tol* donnée.
On utilise pour cela deux méthodes de Runge-Kutta d'ordre p et $\hat{p}$ avec $\hat{p} < p$, donnant comme approximations y_1 et $\hat{y}_1$.
Le h optimal s'obtient à partir de h avec la formule

$$h_{opt} = 0,9.h. \sqrt[\hat{p}+1]{\frac{Tol}{\|y_1 - \hat{y}_1\|}}$$

Pour limiter les calculs, on utilise des méthodes emboîtées (exemple : Euler et Runge).

Plan

Fonction de stabilité

Soit λ un nombre complexe, on considère l'équation différentielle complexe

$$\dot{u} = \lambda u. \tag{1}$$

Il s'agit d'une équation différentielle très simple mais qui peut donner des informations importantes sur le comportement des schémas numériques. On utilise une méthode de Runge-Kutta explicite pour résoudre (1) et on écrit les itérations sous la forme

$$y_{n+1} = R(h\lambda)y_k. \tag{2}$$

R est appelée la fonction de stabilité de la méthode, il s'agit d'un polynôme.

Fonction de stabilité

On note
$$\mathcal{S} = \{z \in \mathbb{C} \;:\; |R(z)| \leq 1\}.$$
Cet ensemble est appelé domaine de stabilité de la méthode.
On dit que la méthode est A-stable si
$$\{z \in \mathbb{C} \;:\; \Re e\, z \leq 0\} \subset \mathcal{S}.$$

Une méthode de Runge-Kutta explicite n'est jamais A-stable.

Fonction de stabilité