

# MODÉLISATION & DISCRÉTISATION, UNE PETITE INTRODUCTION

THIERRY DUMONT

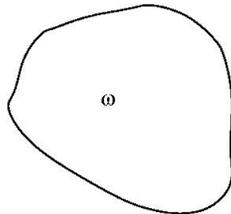
## TABLE DES MATIÈRES

Notations	1
1. Une formule indispensable, la formule de Green	2
La formule de Green	2
2. Lois de conservation	3
2.1. En dimension 1 :	3
2.2. En dimension 2, 3.. ou n	4
2.3. Une autre application de la formule de Green	6
2.4. Une remarque sur la discrétisation	6
3. Mécanique (des solides et des fluides)	6
4. Discrétisation : une très petite introduction	7
4.1. Les différences finies	7
4.2. les éléments finis	8
4.3. les volumes finis	10
4.4. Pour finir :	11
5. Annexe	11

## NOTATIONS

On s'efforce de noter comme  $\vec{x}$  ce qui est vectoriel<sup>1</sup> ; le point . entre deux vecteurs désignera le produit scalaire habituel.

Un "domaine" en dimension 2 ou 3 s'appellera  $\omega$  et sa frontière  $\partial\omega$ .



---

<sup>1</sup>ce qui est peut être agréable pour le lecteur, mais pas pour celui qui tape du LaTeX.

## 1. UNE FORMULE INDISPENSABLE, LA FORMULE DE GREEN

En dimension 1, pour des fonctions d'une variable on a l'intégration par parties :

$$\int_a^b u'(x)v(x) dx = - \int_a^b u(x)v'(x)dx + u(b)v(b) - u(a)v(a).$$

Comment généraliser cette formule en dimension supérieure ?

RAPPELS :

(1) **gradient d'une fonction à valeurs scalaires**

$$(1) \quad \vec{g} = \text{grad } u(\vec{x})$$

est le vecteur de composantes

$$g_i = \frac{\partial u(\vec{x})}{\partial x_i}.$$

(on a noté  $x_i$  les composantes du vecteur  $\vec{x}$ ).

(2) **divergence d'une fonction à valeurs vectorielles**

Étant donné une fonction à valeurs vectorielles  $\vec{u}(\vec{x})$ , de composantes  $(u_1(\vec{x}), u_2(\vec{x}), \dots, u_n(\vec{x}))$ , c'est la fonction scalaire :

$$(2) \quad \text{div } \vec{u}(\vec{x}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial u_i(\vec{x})}{\partial x_i}.$$

**Propriété importante :**

On a que

$$\text{div } \vec{\text{grad}} u(\vec{x}) = \Delta u$$

avec :

$$(3) \quad \Delta u = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u(\vec{x})}{\partial x_i^2}.$$

$\Delta$  est l'opérateur Laplacien. Il jouit de propriétés très importantes, entres autres que  $\Delta u$  ne change pas d'expression dans un changement de repère orthogonal (d'où sa fréquente apparition dans les modèles).

**La formule de Green.** On est en dimension  $n$ . On a une fonction  $u(\vec{x})$  (à valeurs scalaires) et une fonction  $\vec{v}(\vec{x})$  à valeurs vectorielles :

$$\vec{v}(\vec{x}) = (v_1(\vec{x}), v_2(\vec{x}), \dots, v_n(\vec{x}))^t$$

On a (Formule de Green) :

$$(4) \quad \int_{\omega} u(\vec{x}) \text{div}(\vec{v}(\vec{x}))d\omega = - \int_{\omega} \vec{\text{grad}}(u(\vec{x})) \cdot \vec{v}(\vec{x})d\omega + \int_{\partial\omega} \vec{v}(\vec{x}) \cdot \vec{n} u(\vec{x})d\sigma.$$

si on écrit cette formule en dimension un,  $\omega$  devient (par exemple) un segment  $(a, b)$  et on retrouve l'intégration par parties. L'intégrale au bord est plus ou moins difficile à définir.

2. LOIS DE CONSERVATION

On considère un *produit* de densité  $u(x, t)$  au point  $x$  à l'instant  $t$ . On cherche un modèle mathématique pour  $u(x, t)$ .

La quantité de *produit* dans un domaine  $\omega$  à l'instant  $t$  est :

$$Q_\omega(t) = \int_\omega u(x, t) d\omega.$$

On s'intéresse à la variation de  $Q_\omega(t)$  par unité de temps :

$$\frac{dQ_\omega(t)}{dt}.$$

On écrit que cette variation par unité de temps est égale à la somme

- (1) de ce qui est amené ou retranché en chaque point  $x$  à chaque instant  $t$  :  $f(x, t)$
- (2) et de ce qui rentre (ou sort) sous forme de flux au bord.

2.1. **En dimension 1 :**

- On a  $\omega = (a, b)$ ,  $Q_\omega(t) = \int_a^b u(x, t) dx$ ,
- ce qui est apporté ou retranché selon le signe de  $f$  est  $\int_a^b f(x, t) dx$ ,
- le flux est formé de  $\phi(a, t)$  et de  $\phi(b, t)$ .

Un flux *vers la droite* est compté positivement, si bien que l'apport ou le retrait par le flux à la frontière de  $(a, b)$  est  $\phi(a, t) - \phi(b, t)$ .

Tout ceci s'écrit :

$$\frac{d}{dt} \int_a^b u(x, t) dx = \phi(a, t) - \phi(b, t) + \int_a^b f(x, t) dx$$

soit encore :

$$(5) \quad \int_a^b \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} dx = \phi(a, t) - \phi(b, t) + \int_a^b f(x, t) dx,$$

Pour préparer ce qu'on fera en dimension d'espace supérieure à un, on va utiliser la formule d'intégration par parties en introduisant un fonction auxiliaire  $v(x)$  :

$$\int_a^b \frac{\partial \phi(x, t)}{\partial x} v(x) dx = - \int_a^b \phi(x, t) v'(x) dx + \phi(b, t) v(b) - \phi(a, t) v(a).$$

Prenons alors  $v(x) = 1$ , on a :

$$\int_a^b \phi' dx = \phi(b) - \phi(a).$$

On reporte ce résultat dans 5, et on rassemble tout sous la même intégrale :

$$(6) \quad \int_a^b \left( \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + \frac{d\phi(x, t)}{dx} - f(x, t) \right) dx = 0.$$

**Mais ceci doit être indépendant de a et de b.** Donc l'intégrande doit être nulle et on a une **loi de conservation** :

$$(7) \quad \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + \frac{d\phi(x, t)}{dx} = f(x, t)$$

Il faut maintenant *fermer* le système, c'est à dire relier  $\phi$  et  $u$ . C'est là que se situe la physique, la chimie etc...

Exemples :

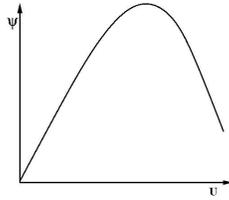
– l'équation de la chaleur :  $\phi$  est donné par la loi de Fourier

$$\phi(x, t) = -k \frac{\partial u(x, t)}{\partial x},$$

et on obtient :

$$(8) \quad \frac{\partial u}{\partial t} - k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f.$$

– plus rigolo : un modèle des embouteillages. On se dit que  $\phi$  doit être directement relié à  $u$  plutôt qu'à ses dérivées ; on pense alors à  $\phi(x, t) = \psi(u(x, t))$  ou  $\psi$  est une fonction concave.



On obtient alors :

$$(9) \quad \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial \psi(u(x, t))}{\partial x} = 0.$$

Des deux équations 8 et 9 laquelle est la plus simple (théoriquement et numériquement) ? C'est l'équation de la chaleur... l'équation 9 est redoutable : des discontinuités de la solution apparaissent en un temps fini ! (équation aux dérivées partielles hyperbolique non linéaire, du premier ordre).

**2.2. En dimension 2, 3.. ou n.** Le flux  $\phi$  est maintenant un vecteur  $\vec{\phi}$  et le flux entrant ou sortant d'un domaine  $\omega$  est  $\vec{\phi} \cdot \vec{n}$ , en tout point de la frontière de  $\omega$ ,  $\vec{n}$  étant la normale unitaire sortante (figure 2.2).

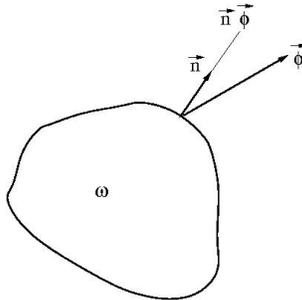


FIG. 1: le flux.

On peut donc utiliser, à la place de l'intégration par parties en dimension un, la formule de Green pour réécrire le flux sous forme d'une intégrale sur  $\omega$  :

$$(10) \quad \int_{\omega} v(\vec{x}) \operatorname{div}(\vec{\phi}(\vec{x})) d\omega = - \int_{\omega} \operatorname{grad}(v(\vec{x})) \cdot \vec{\phi}(\vec{x}) d\omega + \int_{\partial\omega} \vec{\phi}(\vec{x}) \cdot \vec{n} (v(\vec{x})) d\partial\omega.$$

Prenons  $v = 1$  partout ; il vient :

$$(11) \quad \int_{\Omega} \operatorname{div}(\vec{\phi}(\vec{x})) d\Omega = \int_{\sigma} \vec{\phi}(\vec{x}) \cdot \vec{n} d\sigma.$$

et donc la loi de conservation s'écrit :

$$(12) \quad \int_{\omega} \left( \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + \operatorname{div}(\vec{\phi}(\vec{x})) - f(x, t) \right) d\omega = 0.$$

qui doit être vérifiée pour tout  $\omega$ . L'intégrande doit donc être nulle :

$$(13) \quad \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + \operatorname{div}(\vec{\phi}(\vec{x})) - f(x, t) = 0.$$

Là aussi, il faut "fermer" l'équation et donc rajouter une loi "physique" reliant  $\vec{\phi}$  et  $u$ .

Exemples :

- l'équation de la chaleur :  $\vec{\phi}$  est donné par la loi de Fourier

$$\vec{\phi}(x, t) = -k \operatorname{grad} u(x, t),$$

et on obtient :

$$(14) \quad \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} - k \Delta u(x, t) = f(x, t).$$

- l'advection :

$$\vec{\phi}(x, t) = u(x, t) \vec{v},$$

donne :

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + \operatorname{div}(u(x, t) \vec{v}) = f(x, t).$$

si  $\vec{v}$  ne dépend pas de  $\vec{x}$ , on a :

$$\operatorname{div}(u(x, t) \vec{v}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial (uv)_i}{\partial x_i} = v_i \frac{\partial u}{\partial x_i} = \vec{v} \cdot \operatorname{grad}(u).$$

et donc :

$$(15) \quad \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + \vec{v} \cdot \operatorname{grad}(u) = f(x, t).$$

On sait résoudre facilement à la main la dernière équation, si  $\vec{v}$  est indépendant du temps (en plus de l'espace) et si de plus  $f = 0$  ; en effet soit  $U(x)$  la condition initiale, vérifiée par  $u$  en  $t = 0$ . Je dis que la solution est  $u(x, t) = U(x - t\vec{v})$ . Il suffit de dériver  $U(x - t\vec{v})$  par rapport au temps pour le vérifier. *Mais la résolution numérique de ce problème est difficile !*

**2.3. Une autre application de la formule de Green.** Comment dire qu'un fluide de vitesse  $\vec{u}$  (et de masse volumique constante) est incompressible ?

C'est équivalent à dire que, dans tout domaine  $\omega$ , tout le fluide qui rentre ressort, c'est à dire que :

$$\int_{\partial\omega} \vec{u} \cdot \vec{n} \, ds = 0.$$

La formule de Green avec  $v = 1$  donne :

$$\int_{\omega} \operatorname{div} \vec{u} \, d\omega = 0.$$

et donc en en déduit la condition d'incompressibilité :

$$\operatorname{div} \vec{u} = 0.$$

Si on regarde à nouveau l'équation d'advection (ci-dessus), on voit que  $\operatorname{div}(\vec{v}u) = \vec{v} \operatorname{grad} u$  si  $v$  est un écoulement incompressible (dépendant de  $x$  et de  $t$ ). Donc, dans ce cas l'équation d'advection s'écrit :

$$(16) \quad \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + \vec{v} \cdot \operatorname{grad}(u) = f(x, t).$$

**2.4. Une remarque sur la discrétisation.** Un modèle classique pour l'écoulement d'un fluide dans un milieu poreux est la loi de Darcy. Dans ce modèle la pression  $p$  est donnée par une équation de Poisson :

$$\Delta p = 0$$

avec bien sur des conditions aux limites (par exemple la pression connue au bord du domaine de calcul), et la vitesse  $\vec{u}$  du fluide est donnée par

$$\vec{u} = \operatorname{grad} p.$$

Classiquement on résout l'équation sur la pression puis on en calcule les dérivées pour obtenir la vitesse (c'est cette grandeur qu'on cherche en général) : cela se fait au prix d'une perte de précision. Il faut mieux résoudre le système formé des deux équations :

$$\operatorname{div} \vec{u} = 0$$

et

$$\vec{u} = \operatorname{grad} p.$$

Ce système, une fois discrétisé (ce n'est pas trivial), donne une meilleure approximation de la vitesse (plus physique). On parle de *formulation mixte*.

### 3. MÉCANIQUE (DES SOLIDES ET DES FLUIDES)

Pour obtenir les équations de Navier (déformation des solides) et de Navier–Stokes (fluides), on procède grosso modo de la même manière, c'est simplement un peu plus complexe ; il faut par exemple introduire la notion de tenseur. Mais la méthode est toujours de regarder un petit morceau  $\omega$  de matériau (solide, fluide), de faire le bilan des forces qui s'exercent sur la frontière de  $\omega$  et de tout ramener à des intégrales de volume. On utilise la loi fondamentale de la mécanique, la conservation du moment e.t.c. Un des ingrédients pour le fluide sera l'équation d'advection : la masse du fluide se conserve ; sa vitesse est  $\vec{u}$ , sa densité  $\rho$ , constante. La conservation de la masse s'écrit simplement :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \operatorname{div} \vec{u} = 0.$$

4. DISCRÉTISATION : UNE TRÈS PETITE INTRODUCTION

Presque tous les problèmes décrits ci dessus sont linéaires. En supposant d'abord qu'ils sont indépendants du temps (c.a.d.  $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ ) on va, par des procédés décrits plus loin obtenir un système linéaire  $AX = B$ .

Cette étape est particulièrement *dangereuse* : pour simplifier on peut dire que si on obtient par une des discrétisations décrites ci-dessous, sans adaptation, une matrice  $A$  non symétrique, ou avec des zéros sur la diagonale, alors ça ne fonctionnera pas, le résultat présentant des instabilités inacceptables. Le problème des embouteillages, modélisé ci-dessus (page 4) est particulièrement redoutable (on sait faire le calcul, mais ce n'est pas simple) ; la discrétisation évoquée pour la loi de Darcy n'est pas triviale non plus, comme celle des problèmes comportant une contrainte (exemple : divergence nulle pour les fluides incompressibles).

Il y a sommairement trois grandes classes de méthodes :

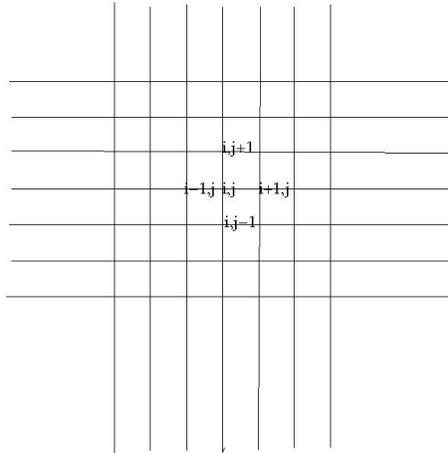
- les différences finies
- les éléments finis
- les volumes finis.

d'autres méthodes ont des champs d'application restreint (méthodes spectrales, méthodes particulières...). On se propose de les expliciter sommairement sur l'équation de Poisson

$$\Delta u = f,$$

et sur l'équation de la chaleur.

**4.1. Les différences finies.** C'est une méthode qui n'est applicable que dans des domaines simples : réunions de boites à cotés parallèles aux axes., ou tout domaine pouvant être approché par une grille. On note  $h$  le pas de la grille, qu'on suppose uniforme dans toutes les directions, mais ce n'est que pour simplifier les notations.



On note  $u_{i,j}$  la solution approchée qu'on veut calculer au point  $(i, j)$ . Il parait clair qu'on peut approcher la dérivée de  $u$  par rapport à  $x$  en ce point par

$$\frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{h},$$

et donc la dérivée seconde par rapport à  $x$  par :

$$\frac{\frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{h} - \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{h}}{h} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2}.$$

Si on est en dimension 2 (la généralisation à la dimension 3 est immédiate), on obtiendra au point  $(i, j)$  l'équation :

$$\frac{u_{i+1,j} + u_{i,j+1} - 4u_{i,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j-1}}{h^2} = f_{i,j}$$

où  $f_{i,j}$  est la valeur de  $f$  au point  $(i, j)$ .

Ces équations sont linéaires, et on en a autant que de points dans la grille. Donc on a en dimension 2 un *grand* système (d'ordre égal au nombre de points dans la grille). Il faut modifier la matrice au bord du domaine pour tenir compte des conditions aux limites.

4.1.1. *L'équation de la chaleur.* En rassemblant tous les  $u_{i,j}$  dans un grand vecteur  $U$ , l'équation de Poisson se ramenant à la résolution de  $AU = F$ , l'équation de la chaleur se ramène à celle d'un système *d'équations différentielles ordinaires* linéaire

$$\frac{dU}{dt} = AU + F.$$

**Remarques :**

- $A$  est une matrice creuse (5 termes non nuls par ligne en dimension 2, 7 termes en dimension 3).
- ses valeurs propres sont dans un intervalle de l'ordre de  $(1, 1/h^2)$  (le conditionnement est en  $1/h^2$ ). Conséquences :
  - les méthodes itératives convergent donc d'autant plus lentement que  $h$  est petit.
  - pour l'équation de la chaleur, on a à faire à un *système d'EDOs RAIDE*.

4.2. **les éléments finis.** les éléments finis présentent plusieurs avantages : ils s'adaptent à des géométries complexes (à condition de disposer d'un maillage), en dimension 2 ou 3, et ils s'adaptent aussi aux grandes familles classiques d'équations (élasticité, chaleur, fluides) ; de plus leur étude mathématique est très poussée et leur programmation est très rationnelle. En revanche ils s'adaptent mal aux problèmes plus difficiles. Reprenons l'équation de Poisson  $\Delta u = f$  ; on multiplie cette équation des deux cotés par  $v(x)$ , on intègre sur le domaine de calcul ; la formule de Green donne (si  $u$  est nulle au bord, ou si le flux au bord est nul) :

$$(17) \quad \int_{\omega} \text{grad } u \cdot \text{grad } v d\omega = - \int_{\omega} f(x)v(x)d\omega.$$

(*forme faible* de l'équation (principe des travaux virtuels en mécanique)).

En effet, on se souvient que  $\Delta u = \text{div gradu}$ . La formule de Green donne :

$$(18) \quad \int_{\omega} \Delta u v d\omega + \int_{\omega} \text{grad } u \cdot \text{grad } v d\omega = \int_{\omega} \frac{\partial u}{\partial n} v d\omega.$$

(on a noté  $\frac{\partial u}{\partial n}$  la quantité *gradu*· $\vec{n}$  (dérivée dans la direction normale sortante à la frontière de  $\omega$ )).

L'idée des éléments finis est d'approcher  $u$  dans (18) par une combinaison linéaire

$$u = \sum_{i=0}^k u_i \phi_i(\vec{x})$$

. On prend pour  $v$  les  $\phi_j$  ce qui donne :

$$\sum_{i=0}^k u_i \int_{\omega} \vec{\text{grad}} \phi_i \cdot \vec{\text{grad}} \phi_j d\omega = \int_{\omega} f \phi_j d\omega$$

On remarque qu'on a un système linéaire à résoudre, les inconnues étant les  $u_i$ ,  $i = 1, k$  et la matrice  $K$  ayant pour coefficients :

$$K_{i,j} = \int_{\omega} \vec{\text{grad}} \phi_i \cdot \vec{\text{grad}} \phi_j d\omega$$

On veut que ce système linéaire soit le plus creux possible : pour cela il faut que  $K_{i,j}$  soit nul pour la majorité des couples  $(i, j)$  ; on impose que les supports des  $\phi_i$  (c.a.d. l'ensemble des points  $\vec{x}$  où  $\phi_i$  est non nul est petit). On veut aussi que les grandeurs  $K_{i,j}$  soient faciles à calculer.

On suppose le domaine triangulé (il y a des contraintes : deux triangles doivent avoir des faces entières communes ou aucun point commun si ce n'est un sommet ; les triangles ne doivent pas s'aplatir)<sup>2</sup>.

### Éléments finis de degré 1 :

Pour chaque sommet  $i$  on va définir la fonction  $\phi_i$  comme valant 1 au sommet  $i$ , zéro en tous les autres sommets et polynomiale de degré 1 sur chaque triangle. On voit que dans les triangles qui contiennent le sommet  $i$ , la fonction est polynomiale de degré 1. Elle est nulle dans tous les triangles qui ne contiennent pas le sommet  $i$ .

L'intégrale  $\int_{\omega} \vec{\text{grad}} \phi_i \cdot \vec{\text{grad}} \phi_j d\omega$  doit être comprise comme une somme des intégrales sur chaque triangle.

En pratique les calculs de la matrice et du second membre sont menés dans des boucles sur les éléments.

La valeur propre de plus grand module se comporte en  $1/h^2$  où  $h$  est la taille moyenne des éléments (les triangles).

Un des intérêts des éléments finis est la programmation assez agréable des calculs ; en fait les intégrales sont calculées élément par élément (triangle par triangle ici) et les résultats assemblés dans la matrice et le second membre du système linéaire à résoudre.

### L'équation de la chaleur

$u(x, t)$  est cherchée sous la forme

$$u(x, t) = \sum_{i=0}^k u_i(t) \phi_i(\vec{x}).$$

En injectant cette expression dans l'équation, multipliée par  $v_i$  et intégrée sur  $\omega$  on obtient, en notant  $U(t)$  le vecteur des  $u_i(t)$ ,  $i = 1, k$  :

$$M \frac{dU(t)}{dt} = KU(t) + F.$$

$M$  est la matrice de coefficients  $M_{i,j} = \int_{\omega} \phi_i \phi_j d\omega$ .

$M$  est en général appelée matrice de masse et  $K$  matrice de raideur (termes qui proviennent de la mécanique).

---

<sup>2</sup>en dimension 3, il faut remplacer triangle par tétraèdres ; mais on peut aussi utiliser des quadrangles en dimension 2 et des hexaèdres en dimension 3.

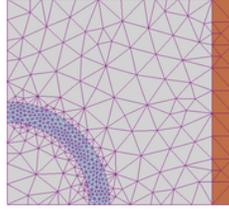


FIG. 2: Un maillage en triangles

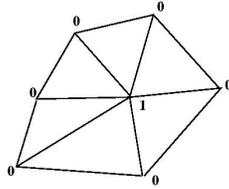


FIG. 3: Une fonction élémentaire

L'équation de la chaleur mène là aussi à la résolution d'un grand système d'équations différentielles raides.

**4.3. les volumes finis.** On va discrétiser des *flux*. Ce qui suit présente les volumes finis les plus simples possibles.

On discrétise le domaine en *volumes* (par exemple des rectangles, mais d'autres choix sont possibles, menant à une formulation plus compliquée). Regardons l'équation de la chaleur.

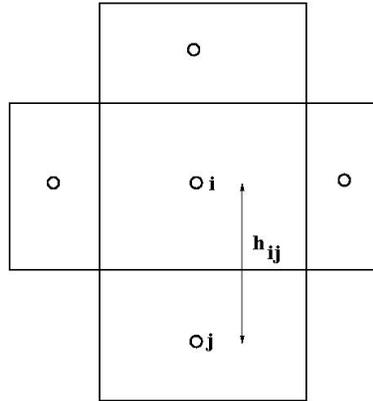
$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} - k\Delta u(x, t) = f(x, t).$$

On intègre l'équation sur chaque volume  $w$ ; la formule de Green, en prenant  $v = 1$  sur  $w$  donne :

$$(19) \quad \frac{d}{dt} \int_{\omega} u d\omega = \int_{\partial\omega} \phi(u) d\partial\omega.$$

où  $\phi(u)$  est le flux de  $u$  à travers la frontière de  $\omega$ . On a  $\phi(u) = \frac{\partial u}{\partial n}$  (dérivée normale à la frontière).

On prend une approximation *constante* pour  $u$  dans chaque volume  $\omega$ . Il faut alors approcher le flux  $\phi$ . C'est facile quand on a un maillage en rectangle. En appelant  $u_i$  la valeur de  $u$  (discrétisée, l'inconnue) dans le volume  $\omega_i$ , le flux entre le volume  $i$  et le volume  $j$  est simplement pris égal à  $\frac{u_i - u_j}{h_{ij}}$  où  $h_{ij}$  est la distance entre les centres des deux rectangles  $i$  et  $j$ . On obtient bien là aussi un système d'EDOs linéaire, très comparable dans ce cas à ceux déjà obtenus.



L'intérêt des méthodes volumes finis est que, en choisissant des flux plus compliqués (souvent très compliqués) on peut résoudre des problèmes très difficiles (par exemple le problème des embouteillages, cités plus haut).

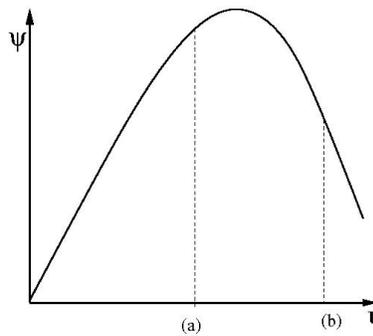
4.4. **Pour finir** : Ces 3 types de discrétisations correspondent à des formulations différentes du même problème :

- forme forte pour les différences finies,
- forme faible pour les éléments finis,
- discrétisation des flux pour les volumes finis.

5. ANNEXE

**Retour sur l'équation des embouteillages** (*problème hyperbolique non linéaire*).

$$(20) \quad \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial \psi(u(x, t))}{\partial x} = 0.$$



Cherchons comme dans le cas de l'advection une solution qui se propage à vitesse constante  $c$  et qui vaille  $v(x)$  à l'instant  $t = 0$  :  $u(x, t) = v(x - ct)$ .

En notant  $v'$  la dérivée de  $v(x)$ , et en injectant  $v(x - ct)$  dans l'équation, on obtient :

$$-c v'(x) + \psi'(v(x)) v'(x) = 0,$$

soit encore :

$$v'(x) (\psi'(v(x)) - c) = 0,$$

La seule possibilité est que

$$c = \psi'(v(x)).$$

Supposons maintenant qu'en deux points  $x_1 < x_2$  les valeurs de  $u$  soient données respectivement par  $a$  et  $b$  (figure page précédente). La vitesse de propagation  $c$  sera plus grande en  $x_1$  qu'en  $x_2$ . Ce qui se passe alors s'explique par la figure ci-dessus.

