



Méthodes FETI

François-Xavier Roux
Unité Calcul à Haute Performance



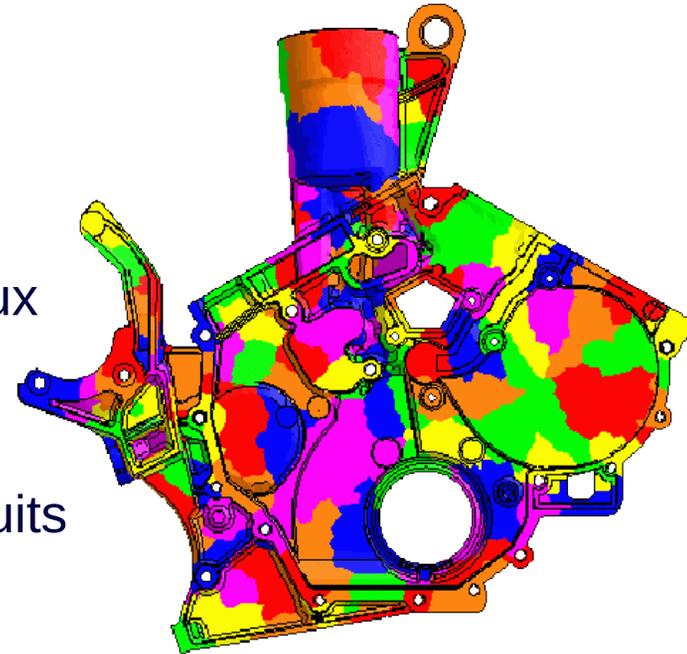
retour sur innovation

Plan

- Principe des méthodes de résolution par sous-domaines sans recouvrement, approche continue
- Méthode de résolution par sous-domaines, approche discrète
- Méthode du complément de Schur
- Mise en œuvre en parallèle
- Méthode FETI
- Traitement des singularités locales : projection « modes rigides »
- Préconditionneur local optimal et « lumped »
- Méthodes de résolution par sous-domaines avec des maillages non coïncidents, éléments joints
- FETI-2 : préconditionneur « grille grossière » par projection
- FETI-DP
- FETI pour des problèmes mixtes
- FETI-H

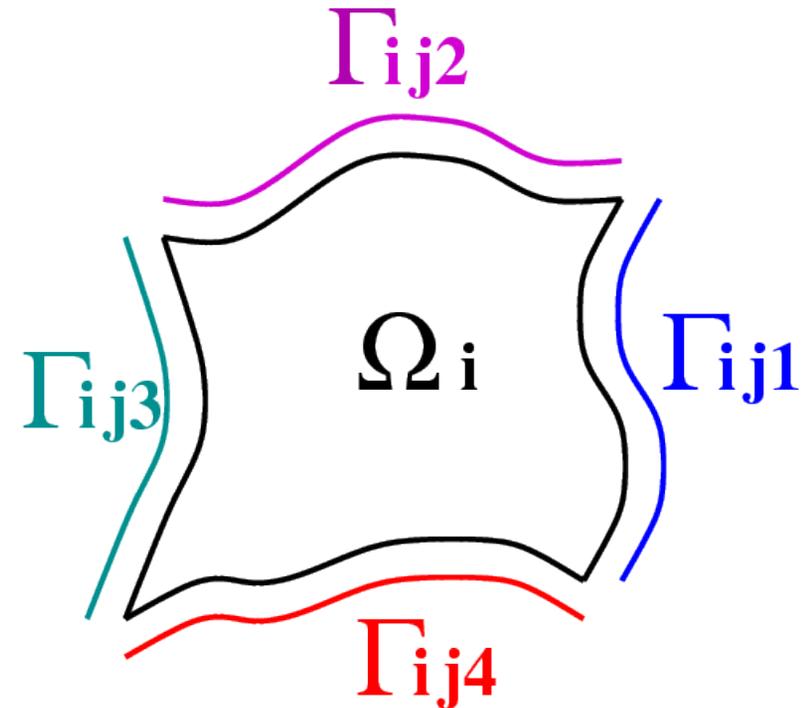
Principe des méthodes de résolution par sous-domaines

- Découpage du maillage en sous-domaines :
partition par éléments
- Résolution itérative globale
- Accélération par résolution exacte dans les sous-structures
 - ⇒ solution d'un problème condensé aux interfaces
- Méthodes mixtes directes-itératives
 - ⇒ robustes, coûts de factorisation réduits



Mise en œuvre en parallèle

- Parallélisation facile par allocation d'un sous-domaine à un processeur
- Gestion des itérations par échanges de données aux interfaces
- Mise en œuvre dans des codes séquentiels existants
- Parallélisation de toutes les phases de calcul élémentaires



description des interfaces

⇒ frontières avec C.L. variables

Méthodes de décomposition de domaines sans recouvrement, approche continue

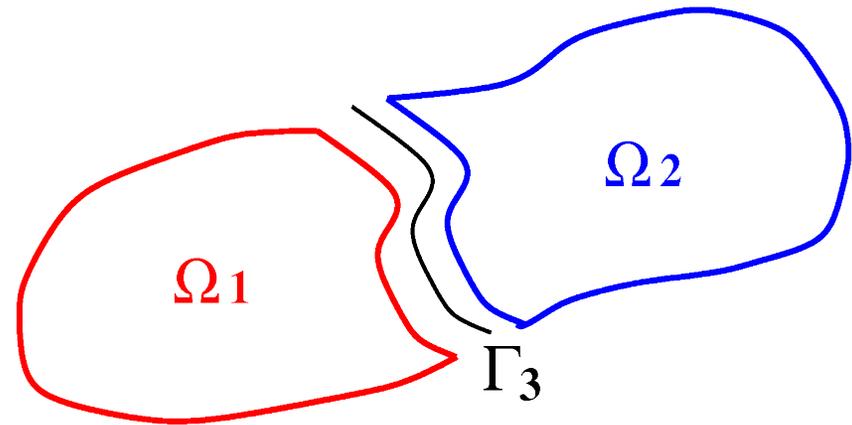
- Problème global

$$\begin{cases} \operatorname{div} \sigma + f = 0 & \text{dans } \Omega \\ \sigma = A(\varepsilon) & \text{dans } \Omega \\ + \text{conditions aux limites sur } \partial\Omega \end{cases}$$

- Problèmes locaux

$$\begin{cases} \operatorname{div} \sigma_1 + f_1 = 0 & \text{dans } \Omega_1 \\ \sigma_1 = A(\varepsilon_1) & \text{dans } \Omega_1 \\ + \text{conditions aux limites sur } \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega \end{cases}$$

$$\begin{cases} \operatorname{div} \sigma_2 + f_2 = 0 & \text{dans } \Omega_2 \\ \sigma_2 = A(\varepsilon_2) & \text{dans } \Omega_2 \\ + \text{conditions aux limites sur } \partial\Omega_2 \cap \partial\Omega \end{cases}$$



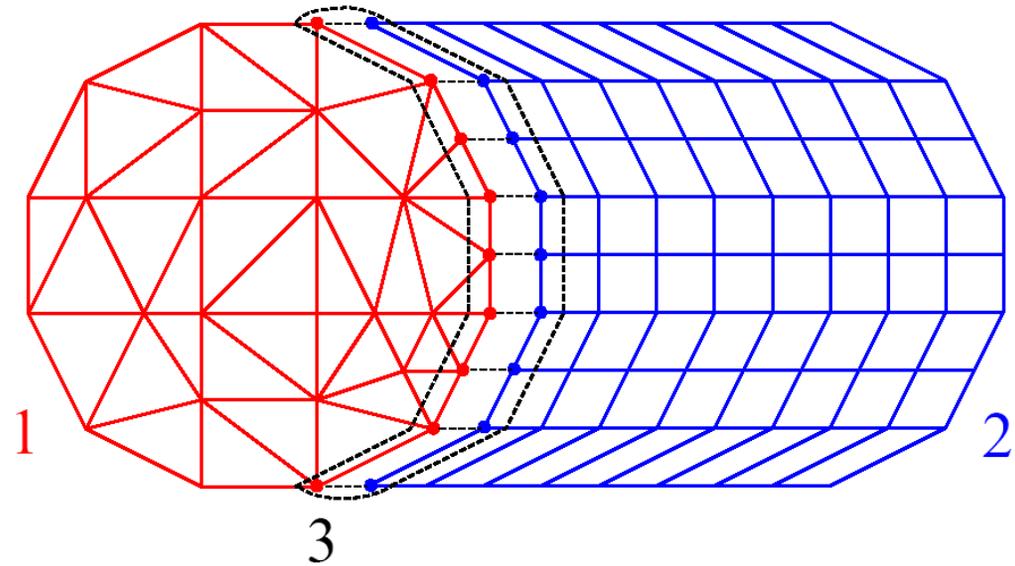
- Conditions de raccord :
admissibilité et équilibre

$$\begin{cases} u_1 = u_2 & \text{sur } \Gamma_3 \\ \sigma_1 n_1 + \sigma_2 n_2 = 0 & \text{sur } \Gamma_3 \end{cases}$$

Découpage par sous-domaine de la matrice de rigidité

- Graphe de la matrice, graphe du maillage

- Séparateur



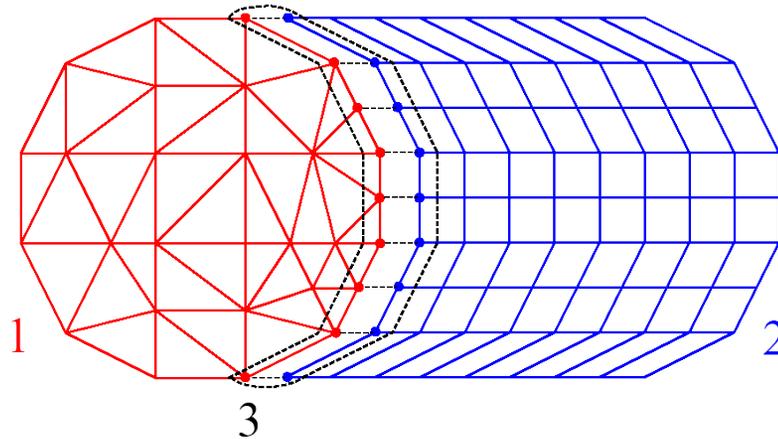
- Structure de la matrice par blocs

$$\begin{pmatrix} K_{11} & 0 & K_{13} \\ 0 & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

Formation du système par sous-domaines

- Découpage du système en deux systèmes locaux

$$\begin{pmatrix} K_{11} & K_{13} \\ K_{31} & K_{33}^{(1)} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3^{(1)} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_3^{(1)} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} K_{22} & K_{23} \\ K_{32} & K_{33}^{(2)} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3^{(2)} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_2 \\ b_3^{(2)} \end{pmatrix}$$



$$K_{33}^{(1)} + K_{33}^{(2)} = K_{33}$$

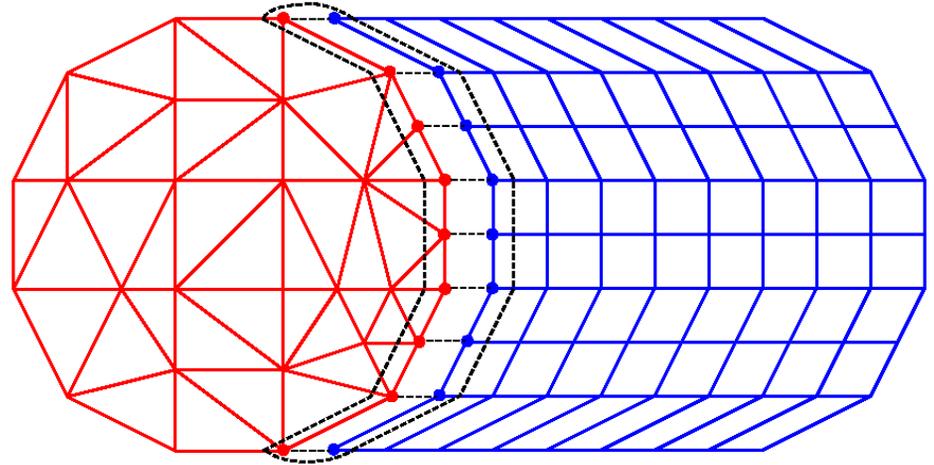
$$b_3^{(1)} + b_3^{(2)} = b_3$$

Equations locales, conditions de raccord

- Equations internes dans chaque sous-domaine

$$K_{11} x_1 + K_{13} x_3^{(1)} = b_1$$

$$K_{22} x_2 + K_{23} x_3^{(2)} = b_2$$



- Condition d'admissibilité cinématique sur l'interface

$$x_3^{(1)} = x_3^{(2)} \quad (= x_3)$$

- Condition d'équilibre à l'interface

$$K_{31} x_1 + K_{32} x_2 + K_{33} x_3 = b_3$$

$$K_{31} x_1 + K_{33}^{(1)} x_3^{(1)} + K_{32} x_2 + K_{33}^{(2)} x_3^{(2)} = b_3^{(1)} + b_3^{(2)}$$

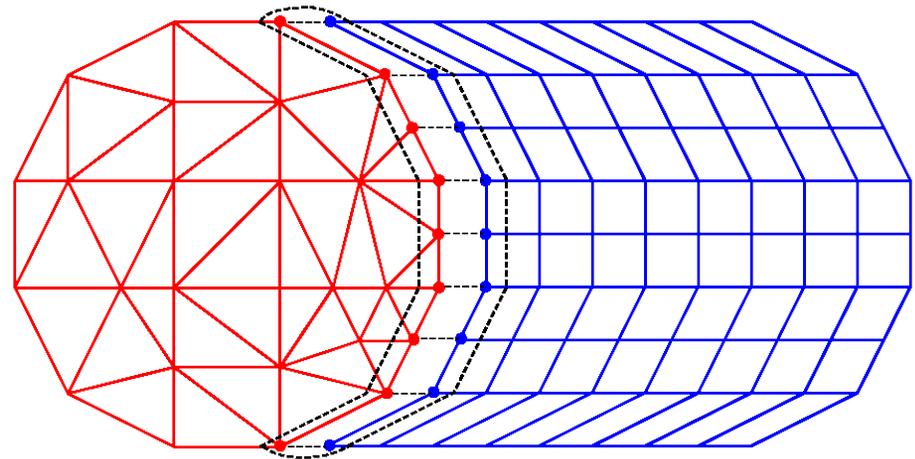
Condensation locale: méthode du complément de Schur

- Variable d'interface: $x_3 = x_3^{(1)} = x_3^{(2)}$

- Détermination des valeurs internes dans chaque sous-domaine par résolution des équations locales

$$K_{11} x_1 = b_1 - K_{13} x_3$$

$$K_{22} x_2 = b_2 - K_{23} x_3$$



- Condition de raccord \Rightarrow définition du résidu à l'interface

$$K_{31} x_1 + K_{32} x_2 + K_{33} x_3 - b_3 =$$

$$\left(K_{33} - K_{31} K_{11}^{-1} K_{13} - K_{32} K_{22}^{-1} K_{23} \right) x_3 - \left(b_3 - K_{31} K_{11}^{-1} b_1 - K_{32} K_{22}^{-1} b_2 \right)$$

Mise en œuvre

- Résolution des équations locales par une méthode directe (Gauss, Choleski)

$$K_{11} x_1 = b_1 - K_{13} x_3$$

$$K_{22} x_2 = b_2 - K_{23} x_3$$

- Calcul du résidu interface local

$$\begin{pmatrix} K_{11} & K_{13} \\ K_{31} & K_{33}^{(1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_1 \\ b_3^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ (K_{33}^{(1)} - K_{31}K_{11}^{-1}K_{13})x_3 - (b_3^{(1)} - K_{31}K_{11}^{-1}b_1) \end{pmatrix}$$

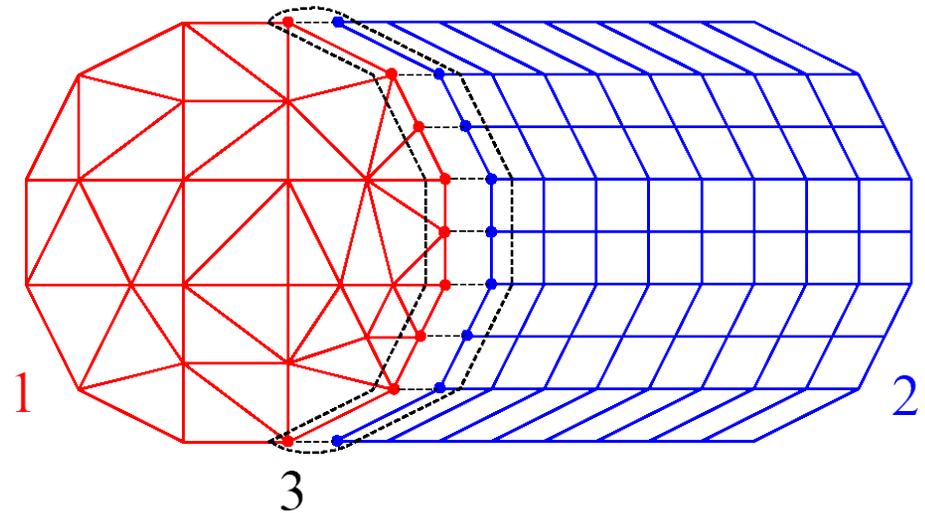
$$\begin{pmatrix} K_{22} & K_{23} \\ K_{32} & K_{33}^{(2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_2 \\ b_3^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ (K_{33}^{(2)} - K_{32}K_{22}^{-1}K_{23})x_3 - (b_3^{(2)} - K_{32}K_{22}^{-1}b_2) \end{pmatrix}$$

- Assemblage du résidu interface global

$$\begin{aligned} & (K_{33}^{(1)} - K_{31}K_{11}^{-1}K_{13})x_3 - (b_3^{(1)} - K_{31}K_{11}^{-1}b_1) + (K_{33}^{(2)} - K_{32}K_{22}^{-1}K_{23})x_3 - (b_3^{(2)} - K_{32}K_{22}^{-1}b_2) \\ &= (K_{33} - K_{31}K_{11}^{-1}K_{13} - K_{32}K_{22}^{-1}K_{23})x_3 - (b_3 - K_{31}K_{11}^{-1}b_1 - K_{32}K_{22}^{-1}b_2) \end{aligned}$$

Mise en œuvre en parallèle et propriétés

- Un domaine par processeur
- Résolution des problèmes locaux indépendants dans chaque processeur
- Echange des résidus interface entre domaines voisins
- Variables et résidus interface connus dans les deux domaines



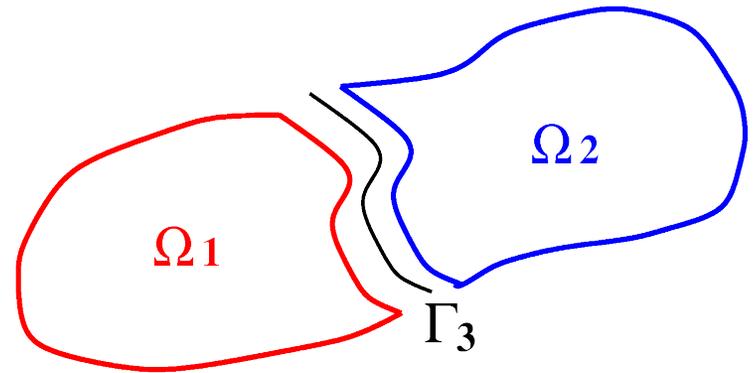
- Méthode itérative sur l'interface, directe à l'intérieur
- Problème mieux conditionné, moins d'itérations que pour une méthode itérative globale
- Seuls les blocs internes des matrices locales sont factorisés, moins coûteux qu'une factorisation globale

Méthode duale : conditions de raccord de Neumann

- Problèmes locaux avec des conditions aux limites de Neumann

$$\begin{cases} \operatorname{div} \sigma_1 + f_1 = 0 & \text{dans } \Omega_1 \\ + \text{c.l. sur } \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega \\ \sigma_1 n_1 = \lambda_1 & \text{sur } \Gamma_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \operatorname{div} \sigma_2 + f_2 = 0 & \text{dans } \Omega_2 \\ + \text{c.l. sur } \partial\Omega_2 \cap \partial\Omega \\ \sigma_2 n_2 = \lambda_2 & \text{sur } \Gamma_3 \end{cases}$$



- Conditions de raccord sur Γ_3

$$\begin{cases} u_1 - u_2 = 0 \\ \sigma_1 n_1 + \sigma_2 n_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} u_1 - u_2 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \end{cases}$$

Formulation discrète : système algébrique

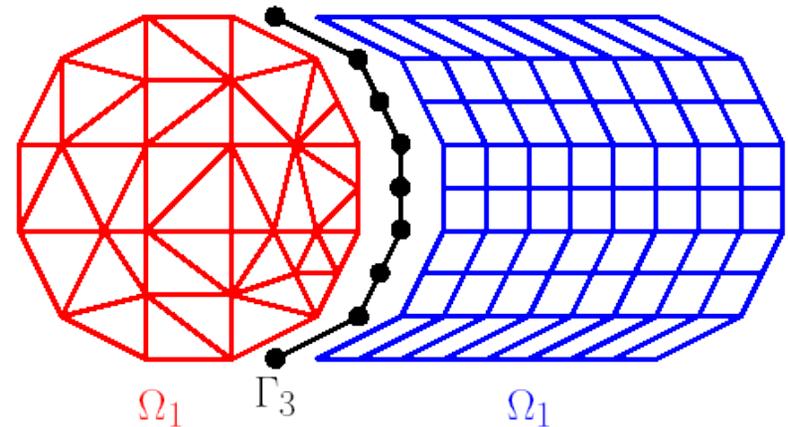
- Problèmes locaux

$$\begin{pmatrix} K_{11} & K_{13} \\ K_{31} & K_{33}^{(1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_3^{(1)} + \lambda_1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} K_{22} & K_{23} \\ K_{32} & K_{33}^{(2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_2 \\ b_3^{(2)} + \lambda_2 \end{pmatrix}$$

- Conditions de raccord

$$x_3^{(1)} - x_3^{(2)} = 0$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 0$$



Méthode FETI

- Variable d'interface : $\lambda = \lambda_1 = -\lambda_2$

- Problèmes locaux :

$$\begin{pmatrix} K_{11} & K_{13} \\ K_{31} & K_{33}^{(1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_3^{(1)} + \lambda \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} K_{22} & K_{23} \\ K_{32} & K_{33}^{(2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_2 \\ b_3^{(2)} - \lambda \end{pmatrix}$$

- Résidu à l'interface : $x_3^{(1)} - x_3^{(2)}$

Problème condensé à l'interface

- Problèmes locaux

$$\begin{pmatrix} K_{11} & K_{13} \\ K_{31} & K_{33}^{(1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_3^{(1)} + \lambda \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} K_{22} & K_{23} \\ K_{32} & K_{33}^{(2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_2 \\ b_3^{(2)} - \lambda \end{pmatrix}$$

- Condensation à l'interface

$$\left(K_{33}^{(1)} - K_{31} K_{11}^{-1} K_{13} \right) x_3^{(1)} = b_3^{(1)} - K_{31} K_{11}^{-1} b_1 + \lambda$$

$$S^{(1)} x_3^{(1)} = c_3^{(1)} + \lambda$$

$$\left(K_{33}^{(2)} - K_{32} K_{22}^{-1} K_{23} \right) x_3^{(2)} = b_3^{(2)} - K_{32} K_{22}^{-1} b_2 - \lambda$$

$$S^{(2)} x_3^{(2)} = c_3^{(2)} - \lambda$$

- Problème condensé à l'interface

$$x_3^{(1)} - x_3^{(2)} = 0 \Leftrightarrow \left(S^{(1)-1} + S^{(2)-1} \right) \lambda = -S^{(1)-1} c_3^{(1)} + S^{(2)-1} c_3^{(2)}$$

FETI = Uzawa sur le problème mixte déplacements locaux - forces d'interaction

- Problèmes locaux

$$\begin{pmatrix} K_{11} & K_{13} \\ K_{31} & K_{33}^{(1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3^{(1)} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ I \end{pmatrix} \lambda = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_3^{(1)} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} K_{22} & K_{23} \\ K_{32} & K_{33}^{(2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3^{(2)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ I \end{pmatrix} \lambda = \begin{pmatrix} b_2 \\ b_3^{(2)} \end{pmatrix}$$

- Condition de raccord à l'interface

$$-x_3^{(1)} + x_3^{(2)} = -\begin{pmatrix} 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3^{(1)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3^{(2)} \end{pmatrix} = 0$$

- Problème mixte

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} K_{11} & K_{13} \\ K_{31} & K_{33}^{(1)} \end{pmatrix} & 0 & \begin{pmatrix} 0 \\ -I \end{pmatrix} \\ 0 & \begin{pmatrix} K_{22} & K_{23} \\ K_{32} & K_{33}^{(2)} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ I \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & -I \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & I \end{pmatrix} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3^{(1)} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3^{(2)} \end{pmatrix} \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_3^{(1)} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} b_2 \\ b_3^{(2)} \end{pmatrix} \\ 0 \end{pmatrix}$$

FETI = Uzawa sur le problème mixte déplacements locaux - forces d'interaction

- Condensation à l'interface des problèmes locaux

$$S^{(1)}x_3^{(1)} = c_3^{(1)} + \lambda \quad S^{(2)}x_3^{(2)} = c_3^{(2)} - \lambda$$

- Condition de raccord à l'interface

$$-x_3^{(1)} + x_3^{(2)} = 0$$

- Problème mixte

$$\begin{pmatrix} S^{(1)} & 0 & -I \\ 0 & S^{(2)} & I \\ -I & I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3^{(1)} \\ x_3^{(2)} \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_3^{(1)} \\ c_3^{(2)} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Problèmes condensés à l'interface

- Élimination des déplacements des sous-domaines dans le problème mixte global

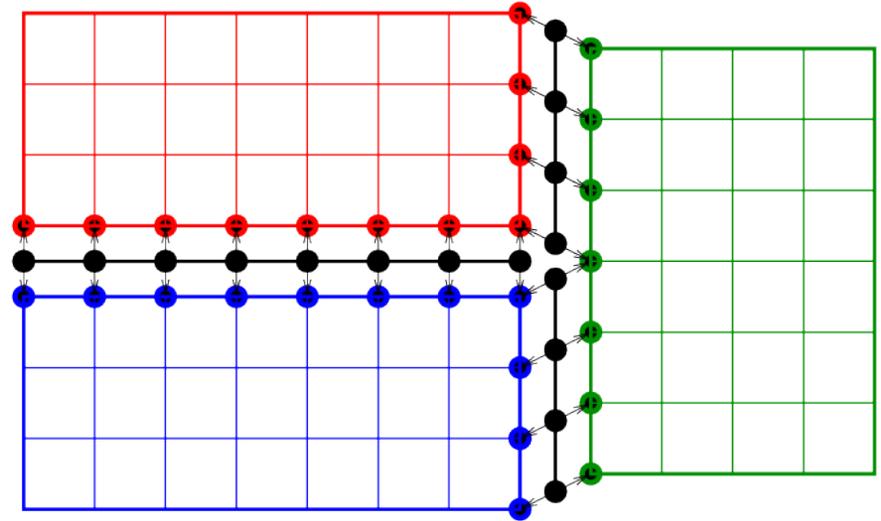
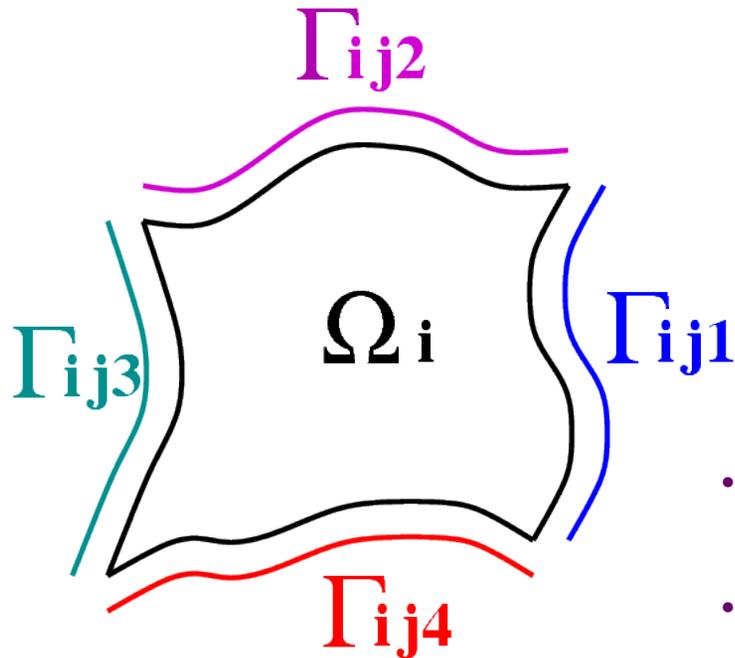
$$\left((0 \quad -I) \begin{pmatrix} K_{11} & K_{13} \\ K_{31} & K_{33}^{(1)} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ -I \end{pmatrix} + (0 \quad I) \begin{pmatrix} K_{22} & K_{23} \\ K_{32} & K_{33}^{(2)} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ I \end{pmatrix} \right) \lambda =$$
$$(0 \quad -I) \begin{pmatrix} K_{11} & K_{13} \\ K_{31} & K_{33}^{(1)} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_3^{(1)} \end{pmatrix} + (0 \quad I) \begin{pmatrix} K_{22} & K_{23} \\ K_{32} & K_{33}^{(2)} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} b_2 \\ b_3^{(2)} \end{pmatrix}$$

- Élimination des déplacements des interfaces dans le problème mixte condensé

$$\left(S^{(1)-1} + S^{(2)-1} \right) \lambda = -S^{(1)-1} c_3^{(1)} + S^{(2)-1} c_3^{(2)}$$

Raccords redondants pour les interfaces multiples

- Pas de variables interface multiples



- Découplage des calculs sur les différentes interfaces
- Mise en œuvre identique pour 2 ou n sous-domaines

Résolution des problèmes mixtes par Uzawa

• Résolution par condensation (Uzawa)
$$\begin{pmatrix} A & B \\ B^t & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$B^t A^{-1} B \quad p = -B^t A^{-1} b$$

$$B^t A^{-1} B \quad p = 0 \Rightarrow (B^t A^{-1} B \quad p, p) = (A^{-1} B \quad p, B \quad p) = 0$$

- Si A est inversible, $\text{Ker}(B^t A^{-1} B) = \text{Ker}(B)$ et donc $\text{Im}(B^t A^{-1} B) = \text{Im}(B^t)$
- L'algorithme du gradient conjugué converge vers la seule solution du problème dans $\text{Im}(B^t A^{-1} B)$
- Pas de problème avec les conditions d'interface redondantes dans FETI
- La solution FETI est identique à la solution globale : condition LBB pas nécessaire

Résolution des problèmes mixtes par projection

- Résolution par projection

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B^t & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(A u + B p, v) = (b, v) \quad \forall v$$

$$(A u, v) = (b, v) \quad \forall v, B^t v = 0$$

$$(A P u, P v) = (b, P v) \quad \forall v, P \text{ projection dans } \text{Ker}(B^t)$$

$$P^t A P u = P^t b$$

- Si P est une projection orthogonale, $P^t = P$
- Calcul de la projection orthogonale dans $\text{Ker}(B^t)$, parallèlement à $\text{Im}(B)$

$$P = I - B (B^t B)^{-1} B^t$$

Méthode du gradient conjugué projeté

- Initialisation

$$B^t u^0 = c, \quad u^0 = B \delta^0 / B^t B \delta^0 = c$$

$$g^0 = A u^0 - b$$

$$P g^0 = g^0 + B \alpha^0 / B^t P g^0 = 0$$

$$w^0 = P g^0$$

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B^t & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix}$$

$$P = I - B (B^t B)^{-1} B^t$$

- Itération

$$u^{p+1} = u^p + \rho^p w^p$$

$$g^{p+1} = g^p + \rho^p A w^p$$

$$\rho^p = \frac{-(g^p \cdot w^p)}{(A w^p \cdot w^p)}$$

- Calcul du gradient projeté

$$P g^{p+1} = g^{p+1} + B \alpha^{p+1} / B^t P g^{p+1} = 0$$

$$w^{p+1} = P g^{p+1} + \gamma^p w^p$$

$$\gamma^p = \frac{-(P g^{p+1} \cdot A w^p)}{(A w^p \cdot w^p)}$$

Résolution de problèmes à matrice singulière

- Factorisation partielle d'une matrice

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_{11} & 0 \\ L_{21} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} \\ 0 & S_{22} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} A_{11} = L_{11}U_{11} \\ A_{12} = L_{11}U_{12} \\ A_{21} = L_{21}U_{11} \\ A_{22} = S_{22} - L_{21}U_{12} \Rightarrow S_{22} = A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} \end{cases}$$

- Si A est une matrice singulière et A_{11} un bloc inversible de rang maximal

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = A_{11}^{-1}b_1 - A_{11}^{-1}A_{12}x_2 \\ (A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})x_2 = b_2 - A_{21}A_{11}^{-1}b_1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -A_{11}^{-1}A_{12} \\ I \end{pmatrix} x_2 \\ (-A_{21}A_{11}^{-1} \quad I) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = A^+b + N\alpha \\ \tilde{N}^t b = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} N = \begin{pmatrix} -A_{11}^{-1}A_{12} \\ I \end{pmatrix} \\ \tilde{N} = \begin{pmatrix} -A_{11}^{-t}A_{21}^t \\ I \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -A_{11}^{-1}A_{12} \\ I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} \end{pmatrix}$$

Modes locaux (mouvements de corps rigides)

- Problème de Neumann local singulier
- Mouvements de corps rigides

$$\begin{cases} \mathbf{X}_3^{(1)} = \mathbf{S}^{(1)+} (\mathbf{c}_3^{(1)} + \boldsymbol{\lambda}) + \mathbf{N}^{(1)} \boldsymbol{\alpha}^{(1)} \\ \mathbf{N}^{(1)t} (\mathbf{c}_3^{(1)} + \boldsymbol{\lambda}) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \mathbf{X}_3^{(2)} = \mathbf{S}^{(2)+} (\mathbf{c}_3^{(2)} - \boldsymbol{\lambda}) + \mathbf{N}^{(2)} \boldsymbol{\alpha}^{(2)} \\ \mathbf{N}^{(2)t} (\mathbf{c}_3^{(2)} - \boldsymbol{\lambda}) = 0 \end{cases}$$

- Problème condensé à l'interface mixte : résolution par projection

$$\begin{pmatrix} \mathbf{S}^{(1)+} + \mathbf{S}^{(2)+} & \mathbf{N}^{(1)} & -\mathbf{N}^{(2)} \\ \mathbf{N}^{(1)t} & 0 & 0 \\ -\mathbf{N}^{(2)t} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\lambda} \\ \boldsymbol{\alpha}^{(1)} \\ \boldsymbol{\alpha}^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mathbf{S}^{(1)+} \mathbf{c}_3^{(1)} + \mathbf{S}^{(2)+} \mathbf{c}_3^{(2)} \\ -\mathbf{N}^{(1)t} \mathbf{c}_3^{(1)} \\ \mathbf{N}^{(2)t} \mathbf{c}_3^{(2)} \end{pmatrix}$$

- Couplage des déplacements de corps rigides locaux

$$\begin{pmatrix} \mathbf{N}^{(1)t} \mathbf{N}^{(1)} & -\mathbf{N}^{(1)t} \mathbf{N}^{(2)} \\ -\mathbf{N}^{(2)t} \mathbf{N}^{(1)} & \mathbf{N}^{(2)t} \mathbf{N}^{(2)} \end{pmatrix}$$

Interprétation de la projection

- Gradient = saut des déplacements

$$g = x_3^{(1)} - x_3^{(2)}$$

- Projection :

$$Pg = x_3^{(1)} - x_3^{(2)} + N^{(1)}\alpha_1 - N^{(2)}\alpha_2$$

$$N^{(1)t}Pg = 0$$

$$N^{(2)t}Pg = 0$$

- Gradient projeté = saut des déplacements corrigés localement par des déplacements de corps rigides qui minimisent le saut total

$$Pg = (x_3^{(1)} + N^{(1)}\alpha_1) - (x_3^{(2)} + N^{(2)}\alpha_2)$$

- Le gradient projeté tend vers 0

Préconditionneur global « grille grossière »

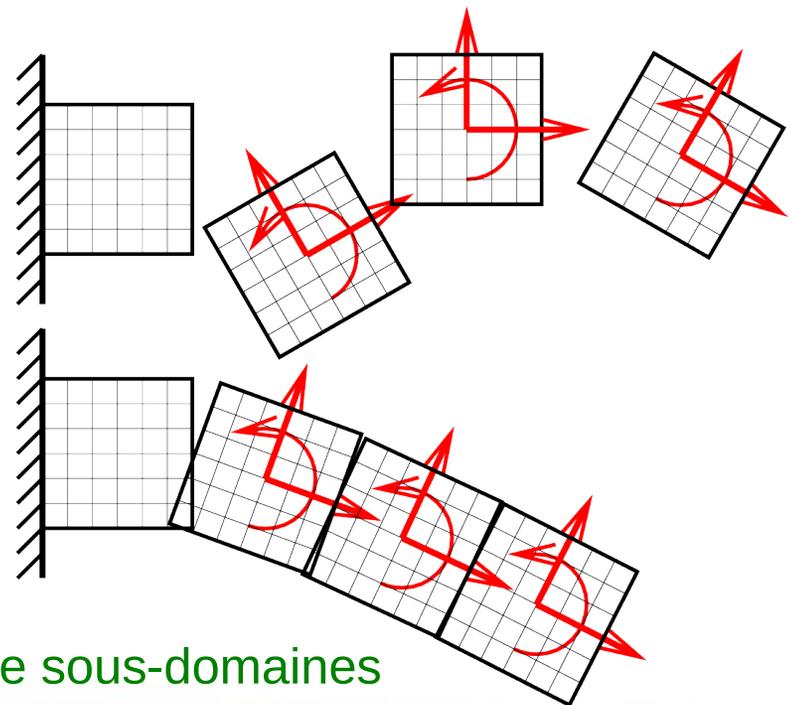
- Transmission entre sous-domaines voisins à chaque itération
 - ⇒ interactions entre domaines éloignés prises en compte par diffusions successives
 - ⇒ nombre d'itérations croissant avec le nombre de sous-domaines
 - ⇒ nécessité d'un mécanisme de transfert d'information entre tous les sous-domaines, preconditionneur global « grille grossière »

- Résolution par projection de FETI



rgb cv

- Ajustement des mouvements de corps rigides à chaque itération
 - ⇒ résolution d'un problème « grossier » global



- Convergence indépendante du nombre de sous-domaines

Préconditionneur local optimal

- Opérateur du problème condensé à l'interface pour FETI

$$F = \left(S^{(1)-1} + S^{(2)-1} \right)$$

- Préconditionneur local optimal (convergence indépendante de la taille du maillage)

$$\tilde{F}^{-1} = \left(\frac{1}{2} S^{(1)} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} S^{(2)} \frac{1}{2} \right)$$

- Calcul du gradient préconditionné

$$K_{11} v_1 = -K_{13} \frac{1}{2} g \quad \begin{pmatrix} K_{11} & K_{13} \\ K_{31} & K_{33}^{(1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \frac{1}{2} g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ (K_{33}^{(1)} - K_{31} K_{11}^{-1} K_{13}) \frac{1}{2} g \end{pmatrix}$$

$$K_{22} v_2 = -K_{23} \frac{1}{2} g \quad \begin{pmatrix} K_{22} & K_{23} \\ K_{32} & K_{33}^{(2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_2 \\ \frac{1}{2} g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ (K_{33}^{(2)} - K_{32} K_{22}^{-1} K_{23}) \frac{1}{2} g \end{pmatrix}$$

- Deux problèmes à résoudre par itération dans chaque sous-domaine

Preconditionneur local « lumped »

- Opérateur interface FETI

$$F = \left(S^{(1)-1} + S^{(2)-1} \right)$$

- Préconditionneur local optimal

$$\tilde{F}^{-1} = \left(\frac{1}{2} S^{(1)} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} S^{(2)} \frac{1}{2} \right)$$

- Préconditionneur local « lumped »

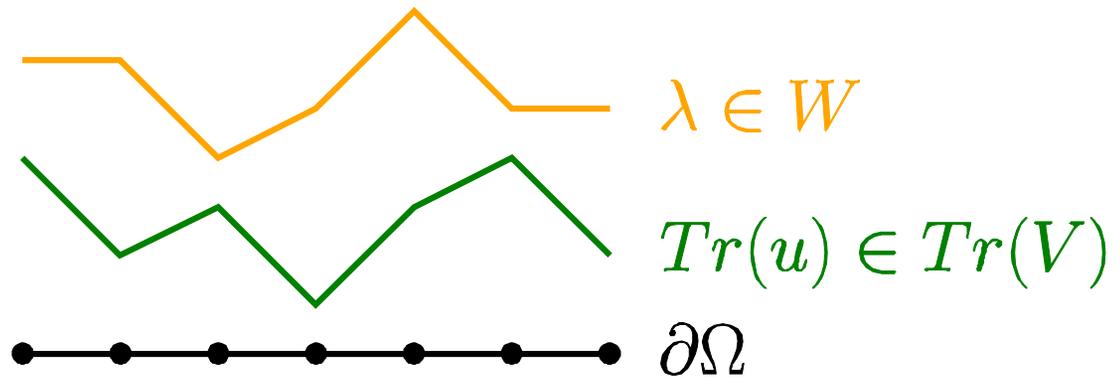
$$\tilde{F}^{-1} = \left(\frac{1}{2} K_{33}^{(1)} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} K_{33}^{(2)} \frac{1}{2} \right)$$

- Coût de calcul très faible, très efficace pour des nombres de sous-domaines peu élevés

Méthodes FETI avec des maillages non conformes

- Formulation faible des conditions de raccord
 \Rightarrow multiplicateur de Lagrange de la condition de continuité
- Choix des espaces de représentation des déplacements et des contraintes surfaciques ainsi que des fonctions test

- Éléments « joint » :

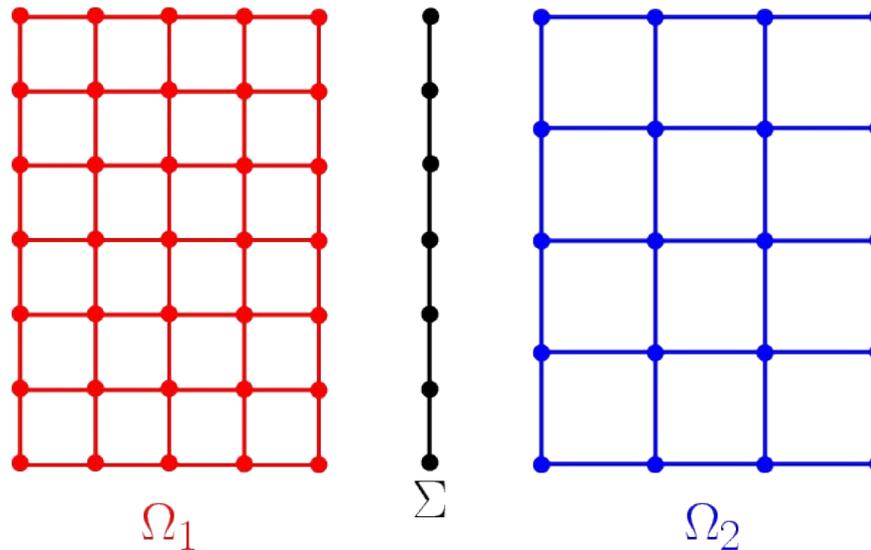


$$u \in V \quad Tr(u) \in Tr(V) \quad \sigma n \in W$$

Méthode des éléments joint (Bernardi, Maday, Patera)

- Choix de l'espace joint à partir des traces d'un des deux sous-domaines

$$u_1 \in V_1 \quad \text{Tr}(u_1) \in \text{Tr}(V_1) \quad \sigma_1 n_1 \in W \quad u_2 \in V_2 \quad \text{Tr}(u_2) \in \text{Tr}(V_2) \quad \sigma_2 n_2 \in W$$



- Conditions de raccord

$$\int_{\Sigma} (u_1 - u_2) \mu = 0 \quad \forall \mu \in W$$

$$\sigma_1 n_1 + \sigma_2 n_2 = 0$$

Discrétisation

- Formulation variationnelle des problèmes locaux

$$\int_{\Omega_1} \sigma_1(u_1) \nabla v_1 = \int_{\Omega_1} f_1 v_1 + \int_{\Sigma_1} \lambda_1 v_1 \quad \forall v_1 \in V_1$$

$$\int_{\Omega_2} \sigma_2(u_2) \nabla v_2 = \int_{\Omega_2} f_2 v_2 + \int_{\Sigma_2} \lambda_2 v_2 \quad \forall v_2 \in V_2$$

- Equations algébriques $K_1 x_1 = b_1 + B_1^t \xi_1$

$$K_2 x_2 = b_2 + B_2^t \xi_2$$

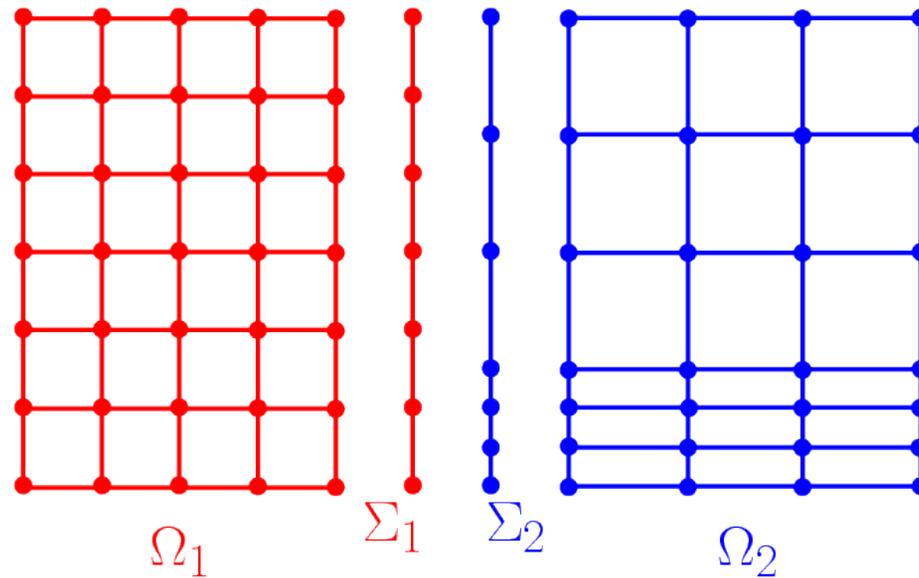
- Conditions de raccord discrétisées

$$\xi_1 + \xi_2 = 0$$

$$B_1 x_1 - B_2 x_2 = 0$$

Choix de l'espace des multiplicateurs?

- Choix de l'espace des multiplicateurs à partir des traces d'un des deux sous-domaines



- La théorie dit qu'on peut prendre n'importe lequel
- Vrai asymptotiquement, en pratique mieux vaut prendre le plus fin
- Maillages plus fins ou plus grossiers de manière non uniforme?

FETI avec des éléments joint

- Variable d'interface = multiplicateur de Lagrange

$$\xi = \xi_1 = -\xi_2$$

- Equations locales

$$K_1 x_1 = b_1 + B_1^t \xi_1$$

$$K_2 x_2 = b_2 + B_2^t \xi_2$$

- Problème d'interface : sauts nuls au sens faible

$$B_1 x_1 - B_2 x_2 = 0$$

Problème FETI non conforme

- Opérateur interface non conforme

$$F = B_1 K_1^{-1} B_1^t + B_2 K_2^{-1} B_2^t$$

- Différence par rapport au cas conforme

$$B_s^t B_s \neq I$$

- L'opérateur de trace n'est pas booléen, il contient une métrique
- Rajout d'un préconditionneur de type diagonal pour compenser l'effet de non homogénéité des maillages

Construction de préconditionneurs « grille grossière » par projection

- On veut résoudre le problème $Ax=b$
- Choix d'un sous-espace grossier C
- Amélioration de la solution approchée dans le sous-espace grossier

$$g^p = Ax^p - b$$

$$\tilde{x}^p = x^p + C \alpha^p$$

$$\tilde{g}^p = g^p + A C \alpha^p$$

$$\tilde{g}^p \text{ minimal} \Rightarrow C^t \tilde{g}^p = 0$$

$$\tilde{g}^p = \left[I - C (C^t A C)^{-1} C^t \right] g^p$$

- Projection A -orthogonale dans le supplémentaire A -orthogonal de C , parallèlement à C
- Il faut calculer et factoriser $C^t A C$

Interprétation comme une méthode de déflation

- On veut résoudre le problème $Ax=b$ par la méthode du gradient conjugué
- Minimisation de $(A(x^p - x), (x^p - x))$ dans l'espace de Krylov K^p généré par les gradients successifs
- x^p projection orthogonale de x dans K^p
- $(A(x^p - x), v) = 0$, pour tout v de K^p

- On connaît une famille de vecteurs (v^1, v^2, \dots, v^p) et leurs produits par A
- Calcul de la projection orthogonale de x dans V^p , l'espace généré par les vecteurs (v^1, v^2, \dots, v^p)

$$\tilde{x} = \sum_{i=1}^p \xi_i v^i \quad \tilde{x} = V\xi$$

$$g = A(\tilde{x} - x) = A\tilde{x} - b = AV\xi - b$$

$$(A(\tilde{x} - x), v^i) = 0 \quad \forall i \Leftrightarrow V^t A(\tilde{x} - x) = 0 \Leftrightarrow V^t AV\xi = V^t b$$

Interprétation comme une méthode de déflation

- On connaît une famille de vecteurs (v^1, v^2, \dots, v^p) et leurs produits par A
- Préconditionnement par optimisation d'une correction construite à l'aide des vecteurs (v^1, v^2, \dots, v^p)

$$g = A(\tilde{x} - x) \quad / \quad V^t g = 0$$

$$w = g + V\xi \quad Aw = Ag + AV\xi$$

$$Aw - g \approx 0$$

$$(Aw - g, v^i) = 0 \quad \forall i \Leftrightarrow V^t(Aw - g) = 0 \Leftrightarrow V^t AV\xi = V^t(g - Ag)$$

$$V^t Aw = 0 \Leftrightarrow V^t AV\xi = -V^t Ag$$

$$w = g - V(V^t AV)^{-1} V^t Ag$$

- Si les vecteurs (v^1, v^2, \dots, v^p) sont A -orthonormés

$$w = g - VV^t Ag = g - V(AV)^t g$$

Mise en œuvre des méthodes de correction « grille grossière » dans le contexte FETI

- L'évaluation du produit par l'opérateur F est coûteux
- Résolution par descente-remontée d'un problème dans chaque sous-domaines, puis échanges aux interfaces

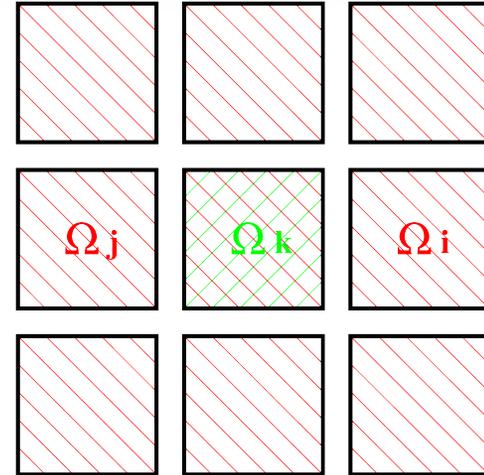
$$\begin{pmatrix} K_{11} & K_{13} \\ K_{31} & K_{33}^{(1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_3^{(1)} + \lambda \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} K_{22} & K_{23} \\ K_{32} & K_{33}^{(2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_2 \\ b_3^{(2)} + \lambda_2 \end{pmatrix}$$

$$g = x_3^{(1)} - x_3^{(2)}$$

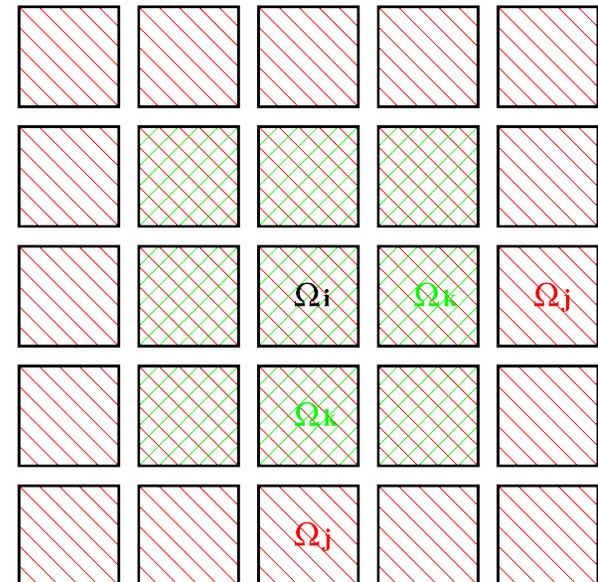
- Pour comparer les coûts de résolution locale et de remise à jour de vecteurs sur l'interface, comparer la place mémoire occupée par la matrice factorisée et la taille d'un vecteur interface
- Le coût de stockage et de modification de vecteurs interface est faible
- Utiliser des méthodes de Krylov avec orthogonalisation exacte, CG, GMRES, ORTHODIR, sans redémarrage
- En cas de résolution multiple, réutilisation des vecteurs de descente précédents comme un espace grossier : approche semi-directe

FETI-2 préconditionneur global avec modes locaux

- Choix de « modes » locaux : coins, constantes par direction, etc...
- Résolution d'un problème local dans chaque sous-domaines pour tous les modes locaux et tous les modes des sous-domaines voisins

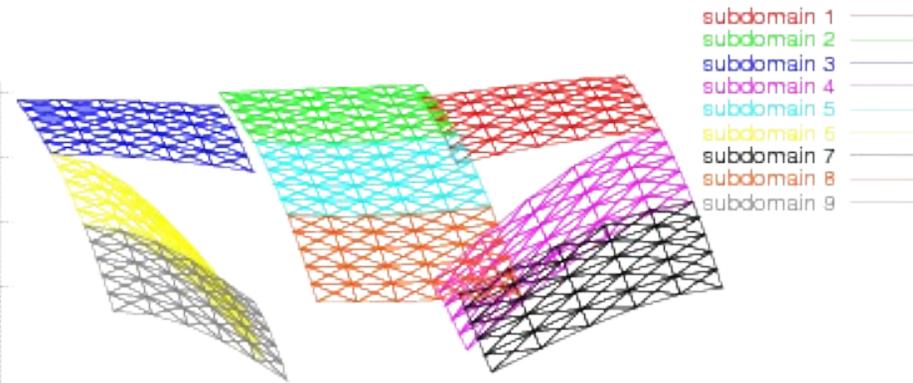


- Assemblage de $C^t F C$
- Matrice « grossière » creuse

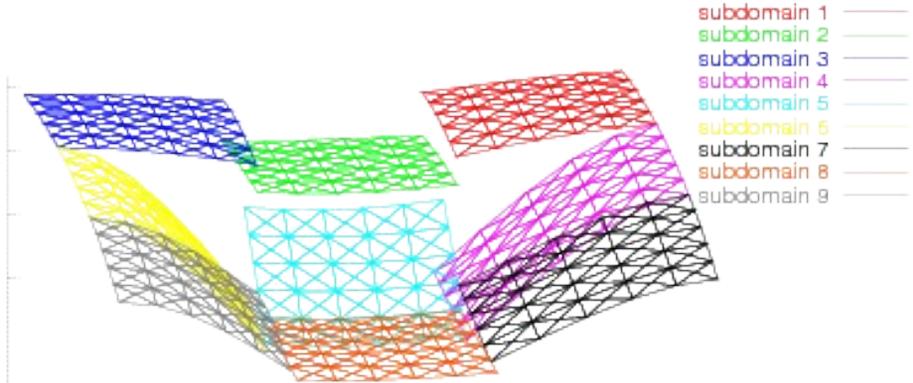


FETI-2 pour un problème de coque

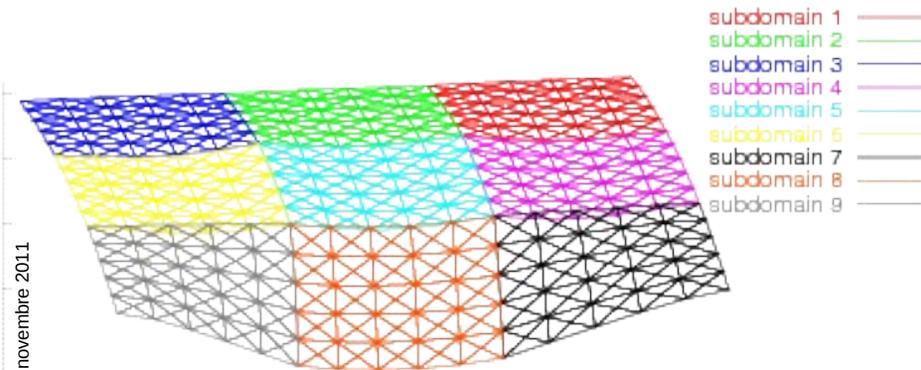
Initial solution without rigid body motion correction



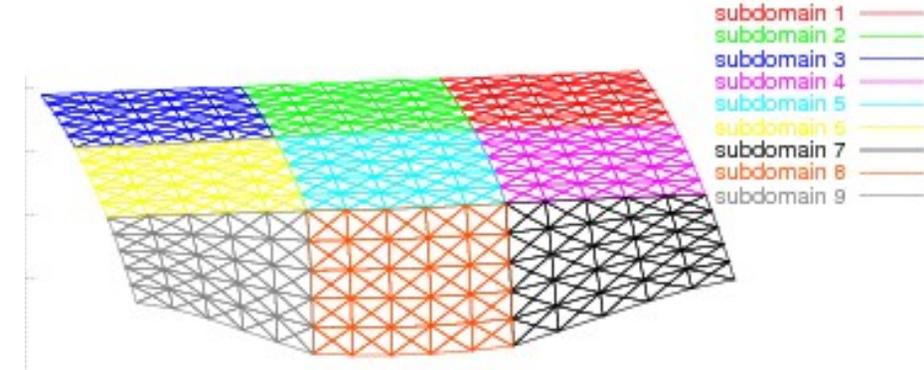
Initial solution without rigid body motion correction



Initial solution with corner correction



Initial solution with both corner and average correction



15 novembre 2011

FETI-2 , problèmes numériques

- L'opérateur FETI n'est pas local en général à cause de la projection modes rigides
- L'espace grossier doit contenir au moins les modes rigides pour pouvoir appliquer la projection
- Le problème grossier est compliqué à construire et la matrice associée est pleine
- Problème de stabilité numérique : la résolution locale est faite avec une précision limitée par le conditionnement de la matrice de rigidité, les modes rigides sont calculés avec la même imprécision, le problème projeté grossier souffre d'accumulations d'erreurs à niveaux multiples

- Comment se débarrasser des modes rigides pour avoir un préconditionneur grossier dont la matrice C^tFC reste creuse?
- Ajouter des conditions aux limites Dirichlet dans les sous-domaines
⇒ prendre un petit nombre de degrés de liberté interface primaux dans chaque sous-domaine (méthode du complément de Schur)
- Par exemple les coins pour un problème de plaques ou de coques
- Variables mixtes sur les interfaces
⇒ la plupart duales (FETI), forces d'interaction
⇒ quelques-unes primales (complément de Schur), déplacements

- Inconvénient, le problème interface est mixte, mauvais conditionnement
⇒ élimination de toutes les variables primales dans le préconditionneur grossier global qui est creux
- Pas toujours facile de déterminer les « coins » : conditions Dirichlet locales minimales, dans le cas de modèles complexes
- Le découpage automatique peut créer des sous-domaines non connexes, encore plus délicat à détecter lors de connexité faible (mécanisme)

FETI pour des problèmes mixtes

- Problèmes mixtes : Stokes, élasticité des matériaux incompressibles...

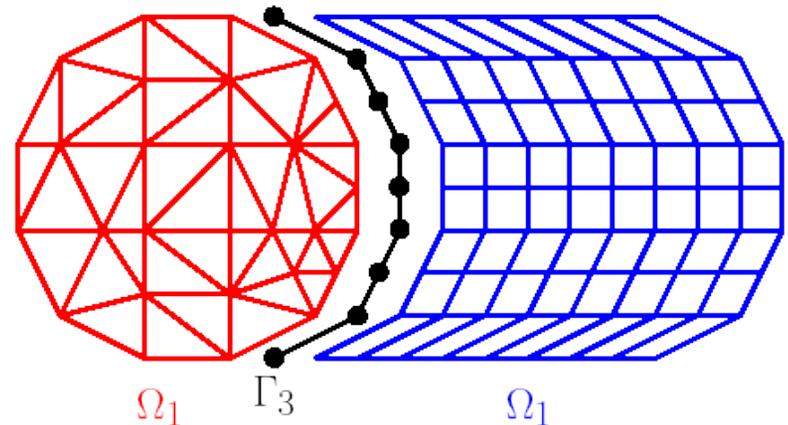
$$\begin{pmatrix} A & B \\ B^t & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_u \\ b_p \end{pmatrix}$$

- $\sigma.n$ et pn sont des forces
- Prendre $\sigma.n$ et p comme variables d'interface
 - ⇒ conditions aux limites de Neumann pour les déplacements (FETI)
 - ⇒ conditions aux limites de Dirichlet pour les pressions (Schur)
- Preconditionneur local : Dirichlet pour les déplacements et Neumann pour les pressions
- Deux projections
 - ⇒ projection modes rigides pour le problème interface (FETI)
 - ⇒ modes de pression constante dans le preconditionneur (traitement de la «balanced method» = Schur + preconditionneur Neumann-Neumann)

Découpage arbitraire à l'interface de la matrice globale

- Système global

$$\begin{pmatrix} K_{11} & 0 & K_{13} \\ 0 & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$



- Systèmes locaux : conditions aux limites de type Fourier

$$\begin{pmatrix} K_{11} & K_{13} \\ K_{31} & K_{33}^{(1)} + A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_3^{(1)} + \lambda \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} K_{22} & K_{23} \\ K_{32} & K_{33}^{(2)} - A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_2 \\ b_3^{(2)} - \lambda \end{pmatrix}$$

- Condition de raccord inchangée

$$g = x_3^{(1)} - x_3^{(2)} = 0$$

- Pour les équation d'Helmholtz

$$-\Delta u - k^2 u = f$$

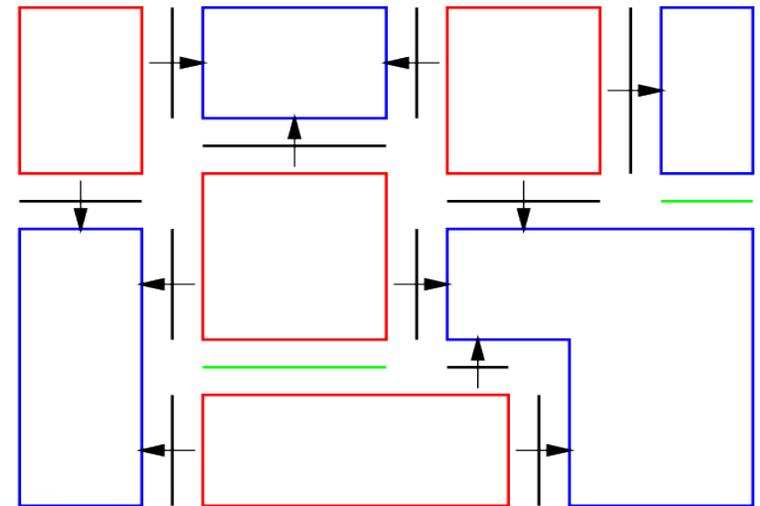
- Matrice augmentée identique à celle du problème avec conditions transparentes approchées

$$\frac{\partial u}{\partial n} \pm iku = \lambda$$

- Problème local bien posé si toutes les conditions sont rentrantes ou sortantes
- Coloriage des sous-domaines
- Mélange d'interfaces de type FETI et FETI-H

$$\begin{pmatrix} K_{11} & K_{13} \\ K_{31} & K_{33}^{(1)} + ikM \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_3^{(1)} + \lambda \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} K_{22} & K_{23} \\ K_{32} & K_{33}^{(2)} - ikM \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_2 \\ b_3^{(2)} - \lambda \end{pmatrix}$$



Conclusion

- Méthodes très robustes, plus rapides que les méthodes directes ou itératives classiques pour des grands problèmes mal conditionnés
- Approche purement algébrique possible
- Interprétation mécanique très utile pour déterminer les bonnes approches (espace réduit pour préconditionnement « grille grossière »)
- Adaptation des méthodes en fonction des problèmes traités
- Maillages non coïncidents
- Mise en œuvre en parallèle sans difficultés (plus facile à programmer avec MPI que dans un code multi-domaine)
- Facile à interfacer avec des codes existants