

Méthodes de raffinement hp pour l'équation de transport des neutrons

D. Fournier^{1,2}, R. Le Tellier¹, R. Herbin²
damien.fournier@cea.fr

¹DEN/DER/SPRC/Laboratoire d'Études de PHysique,

²Laboratoire d'Analyse et de Topologie de Marseille (LATP)

5 Juillet 2011



énergie atomique • énergies alternatives

Contexte

Présentation
des types de
raffinement

Ordre de
conver-
gence
théoriqueEstimateurs
d'erreur

Présentation

Estimateur de
Radau

Estimateur
d'erreur avec
des
hypothèses
de régularité
faibles

Comparaison
des 2
estimateurs

hp – raff.

Présentation

Résultats sur
les cas MMS

Conclusions
et perspec-
tives

- 1 Contexte
 - Présentation des types de raffinement
- 2 Ordre de convergence théorique
- 3 Estimateurs d'erreur
 - Présentation
 - Estimateur de Radau
 - Estimateur d'erreur avec des hypothèses de régularité faibles
 - Comparaison des 2 estimateurs
- 4 *hp* – raffinement
 - Présentation
 - Résultats sur les cas MMS
- 5 Conclusions et perspectives

Contexte

Présentation
des types de
raffinementOrdre de
conver-
gence
théoriqueEstimateurs
d'erreurPrésentation
Estimateur de
RadauEstimateur
d'erreur avec
deshypothèses
de régularité
faiblesComparaison
des 2
estimateurs

hp – raff.

Présentation
Résultats sur
les cas MMSConclusions
et perspec-
tives

- L'équation de transport des neutrons permet de connaître la densité des neutrons dans le réacteur. Cette quantité dépend de l'énergie, de la vitesse et de l'espace
- Après discrétisation des variables énergétiques et angulaires, le problème spatial sur le domaine $\mathcal{D} \in \mathbb{R}^d$ s'écrit

$$\begin{cases} \Omega \cdot \nabla u + cu = g & \text{dans } \mathcal{D} \\ u(x) = u_0(x) & \text{sur } \Gamma_- \end{cases}$$

où

- $u = nv$ est le flux neutronique, produit de la densité de neutrons par la vitesse
- c est relié à la probabilité d'interactions entre les neutrons et les noyaux (fonction constante par morceaux)
- Ω est un vecteur constant
- g est un terme source

Dans les applications classiques, g , u et u_0 appartiennent à $H^{\frac{1}{2}}$ pour des coeurs contenant du vide et $H^{\frac{3}{2}}$ sinon.

- On cherche à mettre en place des méthodes de raffinement hp sur Eq. 3 discrétisée par des éléments finis discontinus.

Contexte

Présentation
des types de
raffinementOrdre de
conver-
gence
théoriqueEstimateurs
d'erreurPrésentation
Estimateur de
RadauEstimateur
d'erreur avec
deshypothèses
de régularité
faiblesComparaison
des 2
estimateurs

hp – raff.

Présentation
Résultats sur
les cas MMSConclusions
et perspec-
tives

- L'équation de transport des neutrons permet de connaître la densité des neutrons dans le réacteur. Cette quantité dépend de l'énergie, de la vitesse et de l'espace
- Après discrétisation des variables énergétiques et angulaires, le problème spatial sur le domaine $\mathcal{D} \in \mathbb{R}^d$ s'écrit

$$\begin{cases} \Omega \cdot \nabla u + cu = g & \text{dans } \mathcal{D} \\ u(x) = u_0(x) & \text{sur } \Gamma_- \end{cases}$$

où

- $u = nv$ est le flux neutronique, produit de la densité de neutrons par la vitesse
- c est relié à la probabilité d'interactions entre les neutrons et les noyaux (fonction constante par morceaux)
- Ω est un vecteur constant
- g est un terme source

Dans les applications classiques, g , u et u_0 appartiennent à $H^{\frac{1}{2}}$ pour des coeurs contenant du vide et $H^{\frac{3}{2}}$ sinon.

- On cherche à mettre en place des méthodes de raffinement hp sur Eq. 3 discrétisée par des éléments finis discontinus.

Contexte

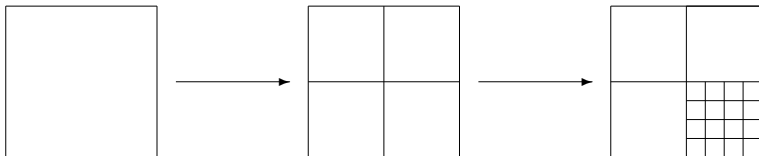
Présentation
des types de
raffinementOrdre de
conver-
gence
théoriqueEstimateurs
d'erreur

Présentation

Estimateur de
RadauEstimateur
d'erreur avec
deshypothèses
de régularité
faiblesComparaison
des 2
estimateurs*hp* – raff.Présentation
Résultats sur
les cas MMSConclusions
et perspec-
tives

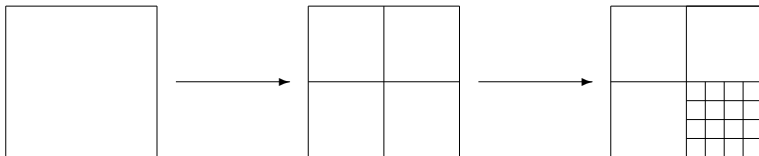
2 méthodes pour raffiner une cellule :

- **h-raffinement** : division d'une cellule en N sous-cellules



2 méthodes pour raffiner une cellule :

- **h-raffinement** : division d'une cellule en N sous-cellules



- **p-refinement** : augmentation de l'ordre de la base d'éléments finis

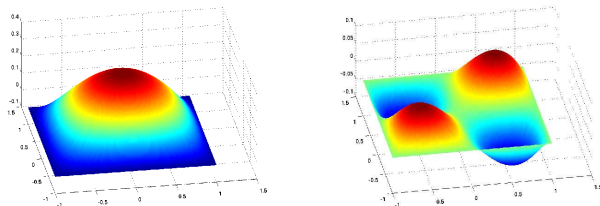
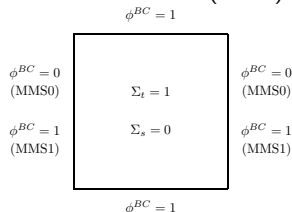


FIGURE: Fonctions de base d'ordre 2 et 3

Nous verrons que le choix du type de raffinement est lié à la régularité. 2 cas tests sont utilisés afin de reproduire la régularité rencontrée dans les cas réels. Ils sont construits par la méthode des solutions manufacturées (MMS)

MMS0 : solution discontinue ($\phi \in H^{\frac{1}{2}}$)

MMS1 : solution continue mais pas la dérivée première ($\phi \in H^{\frac{3}{2}}$)



Contexte

Présentation
des types de
raffinementOrdre de
conver-
gence
théoriqueEstimateurs
d'erreurPrésentation
Estimateur de
Radau
Estimateur
d'erreur avec
des
hypothèses
de régularité
faibles
Comparaison
des 2
estimateurs

hp — raff.

Présentation
Résultats sur
les cas MMSConclusions
et perspec-
tives

Si $u \in H^s$, Cockburn¹ a montré que

$$\epsilon_{p,h} = \|u - u_h\|_{L^2(\mathcal{D})} = \mathcal{O}(h^{\min(p+1,s)})$$

où p est l'ordre de la base d'éléments finis.

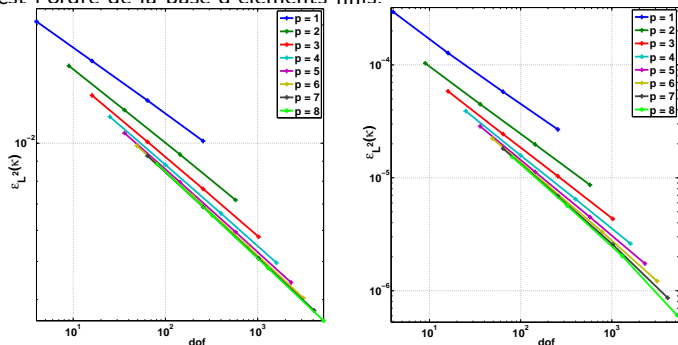


FIGURE: Erreur en norme L^2 sur les cas MMS0 (gauche) et MMS1 (droite) pour un raffinement uniforme en h

1. B. Cockburn, B. Dong and J. Guzman, "Optimal Convergence of the Original DG Method for the Transport-Reaction Equation on Special Meshes", *SIAM, Journal of Numerical Analysis*, 2008, 46(3), pp. 1250-1265.

Contexte

Présentation
des types de
raffinementOrdre de
conver-
gence
théoriqueEstimateurs
d'erreurPrésentation
Estimateur de
RadauEstimateur
d'erreur avec
des
hypothèses
de régularité
faiblesComparaison
des 2
estimateurs

hp-raff.

Présentation
Résultats sur
les cas MMSConclusions
et perspec-
tives

Le seul résultat théorique provient de K. S. Bey². En définissant une norme dépendante du maillage :

$$\|v\|_{hp, \mathcal{D}} = \sum_K \left(\frac{h_K}{p_K^2} \|\Omega \cdot \nabla v\|_{L^2(K)} + \|v\|_{L^2(K)} \right. \\ \left. + \int_{\partial K \setminus \Gamma_-} |\Omega \cdot \nu| (v^+ - v^-)^2 + \int_{\partial K \cap \Gamma} |\Omega \cdot \nu| v^2 \right)$$

ils ont montré que si la solution appartient à H^s alors

$$\|e\|_{hp, \mathcal{D}} = \mathcal{O} \left(\frac{h^{\nu - \frac{1}{2}}}{p^{s-1}} \right)$$

où $\nu = \min(p + 1, s)$.

En s'appuyant sur ces travaux, on a réussi à améliorer cette borne dans le cas de la norme L^2

$$\|e\|_{L^2(\mathcal{D})} = \mathcal{O} \left(\frac{h^{\nu - \frac{1}{2}}}{p^{s - \frac{1}{2}}} \right)$$

2. K. S. Bey and J. T. Oden, "hp-Version Discontinuous Galerkin Method for Hyperbolic Conservation Laws", *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 1996, **133**, pp. 259-286

Contexte

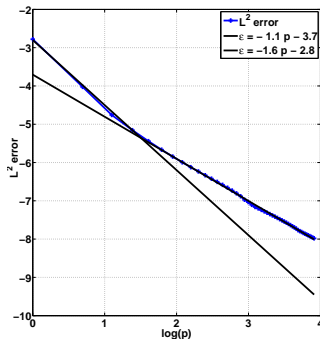
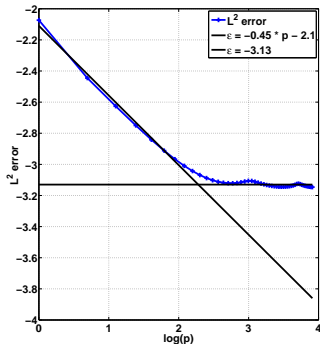
Présentation
des types de
raffinementOrdre de
conver-
gence
théoriqueEstimateurs
d'erreurPrésentation
Estimateur de
Radau
Estimateur
d'erreur avec
des
hypotheses
de régularité
faibles
Comparaison
des 2
estimateurs*hp*-raff.Présentation
Résultats sur
les cas MMSConclusions
et perspec-
tives

FIGURE: L^2 -error for the MMS0 (left) and MMS1 (right) benchmark with uniform p -refinement

- La convergence est en $\mathcal{O}(p^{s-1/2})$ et même $\mathcal{O}(p^s)$ dans une zone préasymptotique
- Ainsi, il est possible de faire décroître l'erreur avec du p -refinement même dans le cas MMS0

Contexte

Présentation
des types de
raffinementOrdre de
conver-
gence
théoriqueEstimateurs
d'erreur

Présentation

Estimateur de
RadauEstimateur
d'erreur avec
deshypothèses
de régularité
faiblesComparaison
des 2
estimateurs hp – raff.

Présentation

Résultats sur
les cas MMSConclusions
et perspec-
tives

Un estimateur d'erreur E *i.e.* est une quantité qui représente le plus précisément possible **l'écart entre la solution exacte et celle calculée**. Idéalement, il doit tendre vers la vraie erreur e en raffinant le maillage et on doit pouvoir trouver α et β tels que

$$\alpha \|E\| \leq \|e\| \leq \beta \|E\|$$

Contexte

Présentation
des types de
raffinementOrdre de
conver-
gence
théoriqueEstimateurs
d'erreur

Présentation

Estimateur de
RadauEstimateur
d'erreur avec
deshypothèses
de régularité
faiblesComparaison
des 2
estimateurs*hp* – raff.

Présentation

Résultats sur
les cas MMSConclusions
et perspec-
tives

Un estimateur d'erreur E *i.e.* est une quantité qui représente le plus précisément possible l'écart entre la solution exacte et celle calculée. Idéalement, il doit tendre vers la vraie erreur e en raffinant le maillage et on doit pouvoir trouver α et β tels que

$$\alpha \|E\| \leq \|e\| \leq \beta \|E\|$$

Il doit être rapide à calculer (négligeable devant le temps d'une itération)

Contexte

Présentation
des types de
raffinementOrdre de
conver-
gence
théoriqueEstimateurs
d'erreur

Présentation

Estimateur de
RadauEstimateur
d'erreur avec
deshypothèses
de régularité
faiblesComparaison
des 2
estimateurs

hp—raff.

Présentation
Résultats sur
les cas MMSConclusions
et perspec-
tives

Un estimateur d'erreur E *i.e.* est une quantité qui représente le plus précisément possible l'écart entre la solution exacte et celle calculée. Idéalement, il doit tendre vers la vraie erreur e en raffinant le maillage et on doit pouvoir trouver α et β tels que

$$\alpha \|E\| \leq \|e\| \leq \beta \|E\|$$

Il doit être rapide à calculer (négligeable devant le temps d'une itération)
On présente 2 estimateurs ayant un comportement différent au regard de la régularité :

- l'estimateur de Radau E^r suppose que la solution est décomposable en série de Taylor
- l'estimateur inspiré des volumes finis E^{fv} suppose uniquement l'appartenance à l'espace des fonctions à variations bornées (BV)

Un estimateur d'erreur E i.e. est une quantité qui représente le plus précisément possible l'écart entre la solution exacte et celle calculée. Idéalement, il doit tendre vers la vraie erreur e en raffinant le maillage et on doit pouvoir trouver α et β tels que

$$\alpha \|E\| \leq \|e\| \leq \beta \|E\|$$

Il doit être rapide à calculer (négligeable devant le temps d'une itération)
On présente 2 estimateurs ayant un comportement différent au regard de la régularité :

- l'estimateur de Radau E^r suppose que la solution est décomposable en série de Taylor
- l'estimateur inspiré des volumes finis E^{fv} suppose uniquement l'appartenance à l'espace des fonctions à variations bornées (BV)

Une fois l'estimateur E connue, une cellule κ^* sera raffinée si

$$(1) \quad E(\kappa^*) > \alpha \max_{\kappa} E(\kappa) \quad \text{avec } \alpha \in [0, 1]$$

- **Hypothèses de régularité importantes** (la solution doit être une fonction analytique)
- L'estimateur E^r est obtenu en **projetant le résidu** sur une base de polynômes R_i (polynômes de Radau). Cette base nous permet d'avoir des propriétés de superconvergence (en particulier aux frontières sortantes)
- Sur une cellule κ l'estimateur s'écrit

$$E_{\kappa}^r = \sum_{i=1}^d \alpha_i R_{p+1}(x_i)$$

où d représente la dimension spatiale et p l'ordre de la base de polynômes des fonctions tests. Les coefficients α_i vérifient

$$\left(2^d \Omega_{x_i} J_{x_i}^{-1} + 2^{d-1} |J| c \|R_{p+1}\|^2 \right) \alpha_i = \int_{\kappa} (g - \Omega \cdot J^{-1} \nabla u - cu) R_{p+1}(x_i) dx_i$$

Contexte

Présentation
des types de
raffinementOrdre de
conver-
gence
théoriqueEstimateurs
d'erreurPrésentation
Estimateur de
RadauEstimateur
d'erreur avec
des
hypothèses
de régularité
faiblesComparaison
des 2
estimateurs

hp-raff.

Présentation
Résultats sur
les cas MMSConclusions
et perspec-
tives

Theorem

Soit u et u_h appartenant à $W^{1,1}(K) \cap L^\infty(K)$. Alors

$$\|u_h - u\|_{L^1(B_R(x_0))} \leq \eta_h = \sqrt{K_1 \eta_1} + \sqrt{K_2 \eta_2}$$

avec $\eta_i = \sum_{K \in \mathcal{T}} \eta_{i,K}$, $i = 1, 2$ et les contributions locales sont données par

$$\eta_{1,K} = \eta_{1,K}^1 + \eta_{1,K}^2 = \int_K h_K |\Omega \cdot \nabla u + cu - g| + \sum_{\sigma \in \partial K} h_\sigma \int_\sigma |\Omega \cdot \nu| |u^+ - u^-|$$

$$\eta_{2,K} = \|\bar{u} - u\|_{L^\infty(K)} \int_K |\Omega \cdot \nabla u + cu - g| + \sum_{\sigma \in \partial K} \|\bar{u} - u\|_{L^\infty(\sigma)} \int_\sigma |\Omega \cdot \nu| |u^+ - u^-|$$

où \bar{u} est la valeur moyenne de u .

Contexte

Présentation
des types de
raffinementOrdre de
conver-
gence
théoriqueEstimateurs
d'erreurPrésentation
Estimateur de
RadauEstimateur
d'erreur avec
des
hypothèses
de régularité
faiblesComparaison
des 2
estimateurs*hp* – raff.Présentation
Résultats sur
les cas MMSConclusions
et perspec-
tives

On compare les différents termes du théorème :

- Terme sur la cellule $\eta_1^1 = \int_K h_K |\Omega \cdot \nabla u + cu - g|$
- Terme sur les arêtes $\eta_1^2 = \sum_{\sigma \in \partial K} h_\sigma \int_\sigma |\Omega \cdot \nu| |u^+ - u^-|$

On compare les différents termes du théorème :

- Terme sur la cellule $\eta_1^1 = \int_K h_K |\Omega \cdot \nabla u + cu - g|$
- Terme sur les arêtes $\eta_1^2 = \sum_{\sigma \in \partial K} h_\sigma \int_\sigma |\Omega \cdot \nu| |u^+ - u^-|$

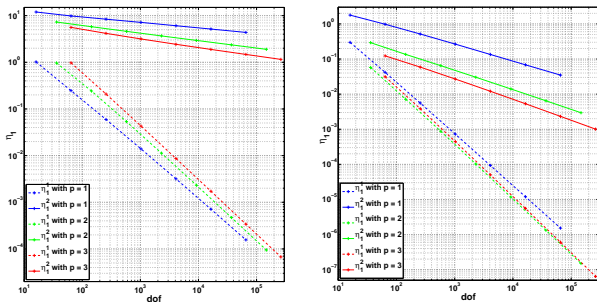


FIGURE: Comparaison de η_1^1 et η_1^2 en fonction de dof et p sur les cas MMS0 (gauche) et MMS1 (droite)

Contexte

Présentation
des types de
raffinementOrdre de
conver-
gence
théoriqueEstimateurs
d'erreur

Présentation

Estimateur de
RadauEstimateur
d'erreur avec
deshypothèses
de régularité
faiblesComparaison
des 2
estimateurs*hp* – raff.

Présentation

Résultats sur
les cas MMSConclusions
et perspec-
tives

On compare les différents termes du théorème :

- Terme sur la cellule $\eta_1^1 = \int_K h_K |\Omega \cdot \nabla u + cu - g|$
- Terme sur les arêtes $\eta_1^2 = \sum_{\sigma \in \partial K} h_\sigma \int_\sigma |\Omega \cdot \nu| |u^+ - u^-|$

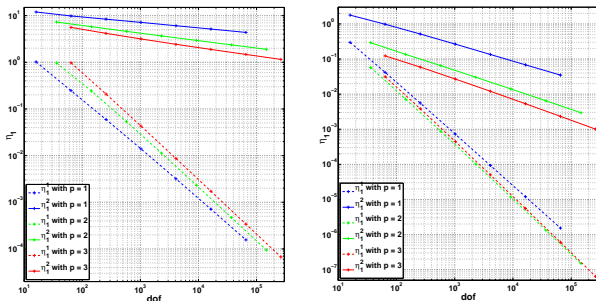


FIGURE: Comparaison de η_1^1 et η_1^2 en fonction de dof et p sur les cas MMS0 (gauche) et MMS1 (droite)

Les termes sur les arêtes sont dominants. On négligera donc les termes sur les cellules dans la suite.

Il faut maintenant comparer $\|\bar{u} - u\|_{L^\infty(K)}$ à h_K .

h	2^{-1}	2^{-2}	2^{-3}	2^{-4}	2^{-5}	2^{-6}
$\ \bar{u} - u\ _{L^\infty(K)}$	0.4316	0.4546	0.4661	0.4718	0.4746	0.4760

TABLE: $\|\bar{u} - u\|_{L^\infty(K)}$ en fonction de h sur le cas MMS0

Contexte

Présentation
des types de
raffinementOrdre de
conver-
gence
théoriqueEstimateurs
d'erreurPrésentation
Estimateur de
RadauEstimateur
d'erreur avec
des
hypothèses
de régularité
faiblesComparaison
des 2
estimateurs hp -raff.Présentation
Résultats sur
les cas MMSConclusions
et perspec-
tives

Il faut maintenant comparer $\|\bar{u} - u\|_{L^\infty(K)}$ à h_K .

h	2^{-1}	2^{-2}	2^{-3}	2^{-4}	2^{-5}	2^{-6}
$\ \bar{u} - u\ _{L^\infty(K)}$	0.4316	0.4546	0.4661	0.4718	0.4746	0.4760

TABLE: $\|\bar{u} - u\|_{L^\infty(K)}$ en fonction de h sur le cas MMS0

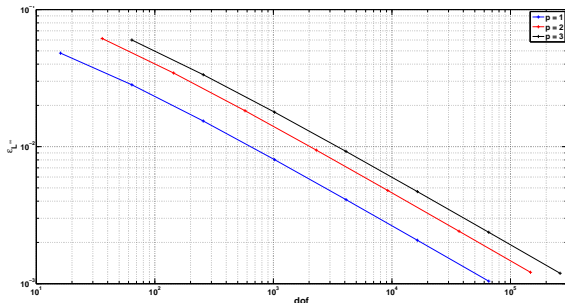


FIGURE: $\|\bar{u} - u\|_{L^\infty(K)}$ en fonction de dof sur le cas MMS1

Il est donc a priori nécessaire de conserver le terme $\|\bar{u} - u\|_{L^\infty(K)}$. Toutefois, on compare le raffinement lorsqu'il est fait par rapport à

- $\eta_{1,K}^2 = \sum_{\sigma \in \partial K} h_\sigma \int_\sigma |\Omega \cdot \nu| |u^+ - u^-|$
- $\eta_{1,K}^2 + \eta_{2,K}^2 = \sum_{\sigma \in \partial K} (h_\sigma + \|\bar{u} - u\|_{L^\infty(K)}) \int_\sigma |\Omega \cdot \nu| |u^+ - u^-|$

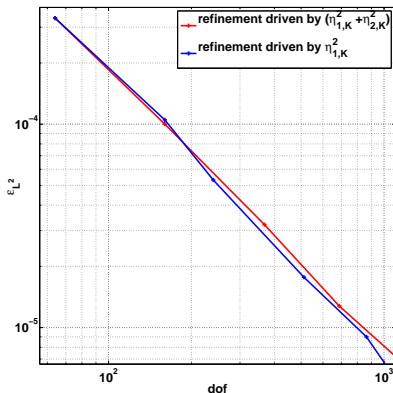


FIGURE: L^2 -error on the MMS0 benchmark depending on the kept terms in E^{DG}

Estimateur d'erreur avec des hypothèses de régularité faibles

Il est donc a priori nécessaire de conserver le terme $\|\bar{u} - u\|_{L^\infty(K)}$. Toutefois, on compare le raffinement lorsqu'il est fait par rapport à

- $\eta_{1,K}^2 = \sum_{\sigma \in \partial K} h_\sigma \int_\sigma |\Omega \cdot \nu| |u^+ - u^-|$
- $\eta_{1,K}^2 + \eta_{2,K}^2 = \sum_{\sigma \in \partial K} (h_\sigma + \|\bar{u} - u\|_{L^\infty(K)}) \int_\sigma |\Omega \cdot \nu| |u^+ - u^-|$

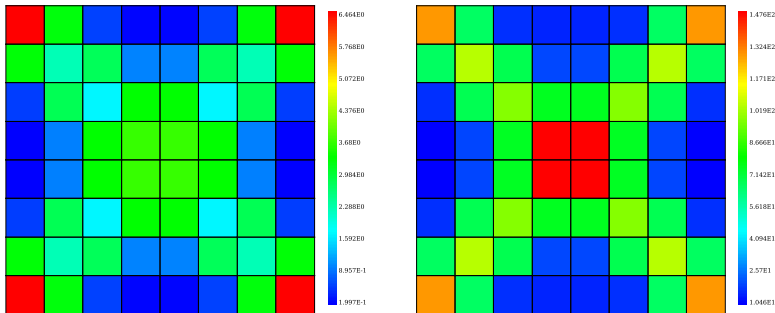
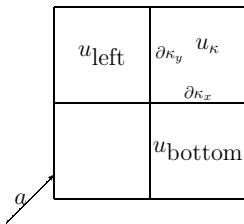


FIGURE: $\eta_{1,K}^2$ (gauche) et $\eta_{1,K}^2 + \eta_{2,K}^2$ (droite) sur le cas MMS0

- dans le cas MMS0, le raffinement se produit de la même manière si l'on conserve un seul terme
- dans le cas MMS1, les deux termes ont un comportement équivalent

On peut donc conserver uniquement $\eta_{1,K}^2$ pour éviter de calculer une norme infinie. L'estimateur simplifié s'écrit

$$\tilde{E}_\kappa^{fv} = |\Omega_x| \int_{\partial\kappa_x} |u_\kappa - u_{\text{bottom}}| dx + |\Omega_y| \int_{\partial\kappa_y} |u_\kappa - u_{\text{left}}| dy$$



C'est l'estimateur obtenu dans le cadre des volumes finis³

3. R. Eymard, T. Gallouët, M. Ghilani, R. Herbin, "Error Estimates for the Approximate Solutions of a Nonlinear Hyperbolic Equation given by Finite Volume Schemes", *Journal of Numerical Analysis*, 1998, **18**, pp. 563-594

Comparaison des 2 estimateurs

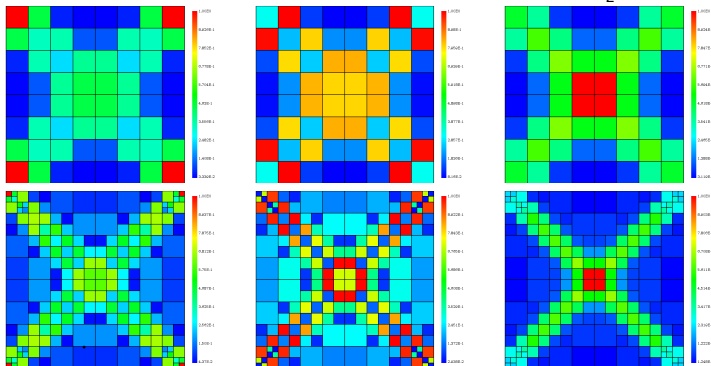
 E^{fv} E^r ϵ_{L1} 

FIGURE: \tilde{E}^{fv} (gauche), E^r (milieu), ϵ_{L1} droite) avec 64 (haut) et 208 (bas) cellules sur le cas MMS0

- Mauvais comportement de l'estimateur de Radau le long des diagonales
- L'estimateur inspiré des volumes finis localisent bien les zones de non régularité

Comparaison des 2 estimateurs

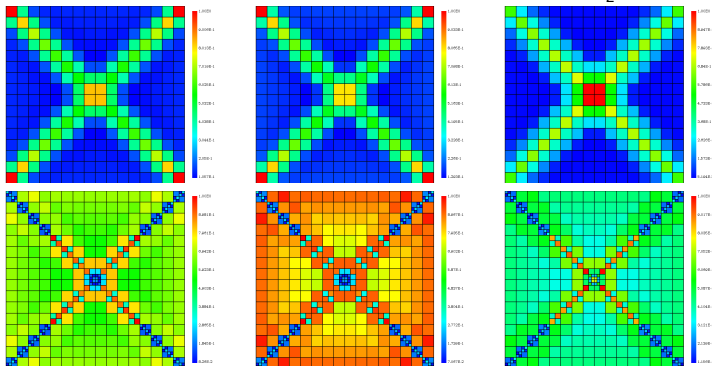
 \tilde{E}^{fv} E^r ϵ_{L1} 

FIGURE: \tilde{E}^{fv} (gauche), E^r (milieu), ϵ_{L1} (droite) avec 64 (haut) et 208 (bas) cellules sur le cas MMS1

- Les 2 estimateurs ont un comportement similaire notamment sur le maillage initial
- L'estimateur de Radau sous-estime toujours l'erreur le long des diagonales

Contexte

Présentation
des types de
raffinementOrdre de
conver-
gence
théoriqueEstimateurs
d'erreurPrésentation
Estimateur de
Radau
Estimateur
d'erreur avec
des
hypothèses
de régularité
faibles
Comparaison
des 2
estimateurs

hp-raff.

Présentation

Résultats sur
les cas MMSConclusions
et perspec-
tives

	$E^r > \text{tol}$	$E^r < \text{tol}$
$\tilde{E}^{fv} > \text{tol}$	p -raffinement	h -raffinement

TABLE: Première stratégie de raffinement (hp_1)

Contexte

Présentation
des types de
raffinementOrdre de
conver-
gence
théoriqueEstimateurs
d'erreurPrésentation
Estimateur de
RadauEstimateur
d'erreur avec
des
hypothèses
de régularité
faiblesComparaison
des 2
estimateurs

hp-raff.

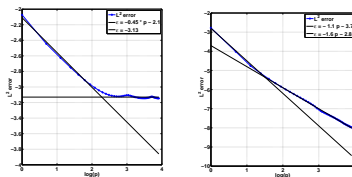
Présentation

Résultats sur
les cas MMSConclusions
et perspec-
tives

	$E^r > \text{tol}$	$E^r < \text{tol}$
$\tilde{E}^{fv} > \text{tol}$	p -raffinement	h -raffinement

TABLE: Première stratégie de raffinement (hp_1)

	$E^r > \text{tol}$	$E^r < \text{tol} \ \& \ p \leq 4$	$E^r < \text{tol} \ \& \ p > 4$
$E^{fv} > \text{tol}$	p -raffinement	p -raffinement	h -raffinement

TABLE: Deuxième stratégie de raffinement (hp_2)FIGURE: Erreur L^2 — sur le cas MMS0 (gauche) et MMS1 (droite) avec un raffinement uniforme en p

Resultats sur les cas MMS

Contexte

Présentation
des types de
raffinementOrdre de
conver-
gence
théoriqueEstimateurs
d'erreur

Présentation

Estimateur de
RadauEstimateur
d'erreur avec
deshypothèses
de régularité
faiblesComparaison
des 2
estimateurs

hp-raff.

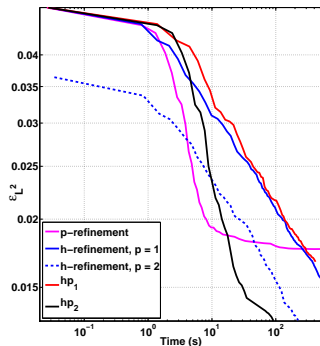
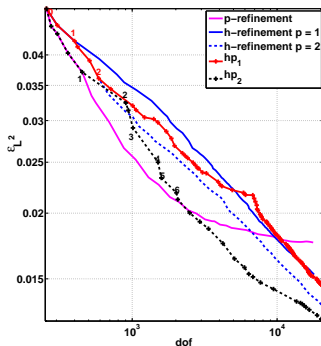
Présentation
Resultats sur
les cas MMSConclusions
et perspec-
tives

FIGURE: Erreur L^2 versus dof (gauche) et temps (droite) pour le cas MMS0 avec différentes stratégies de raffinement

- Interêt du p -raffinement pour des valeurs faibles de p , après la convergence est plus lente et le temps de calcul explose
- Importance de favoriser le p -raffinement au début de la stratégie hp
- Bonne performance de la stratégie hp_2

Resultats sur les cas MMS

Contexte

Présentation
des types de
raffinementOrdre de
conver-
gence
théoriqueEstimateurs
d'erreur

Présentation

Estimateur de
RadauEstimateur
d'erreur avec
deshypotheses
de régularité
faiblesComparaison
des 2
estimateurs

hp-raff.

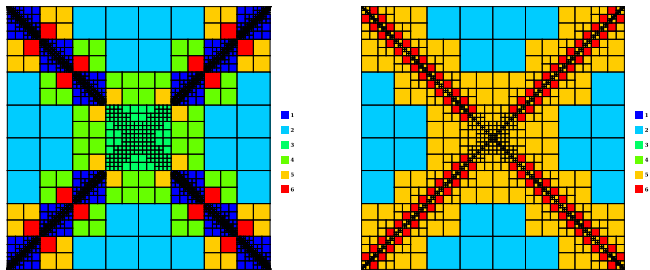
Présentation
Resultats sur
les cas MMSConclusions
et perspec-
tives

FIGURE: Ordre des polynômes et maillage pour les stratégies hp_1 (gauche) et hp_2 (droite)

- Les cellules diagonales sont toujours sélectionnées pour du h -raffinement
- Forcer le p -raffinement pour de faibles valeurs de p améliore la convergence

Resultats sur les cas MMS

Contexte

Présentation
des types de
raffinementOrdre de
conver-
gence
théoriqueEstimateurs
d'erreurPrésentation
Estimateur de
RadauEstimateur
d'erreur avec
deshypotheses
de régularité
faiblesComparaison
des 2
estimateurs

hp-raff.

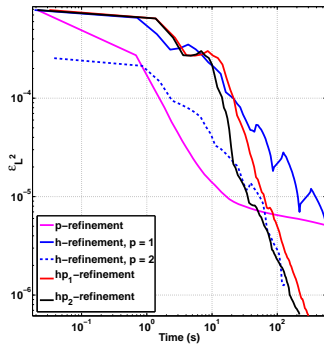
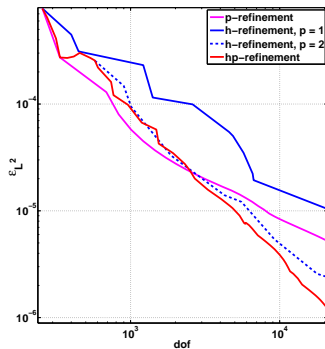
Présentation
Resultats sur
les cas MMSConclusions
et perspec-
tives

FIGURE: Erreur L^2 versus dof (gauche) et temps (droite) pour le cas MMS1 avec différentes stratégies de raffinement

- Comportement équivalent des stratégies hp - et du h -raffinement avec $p = 2$
- Temps de calcul important pour de grandes valeurs de p

Contexte

Présentation
des types de
raffinementOrdre de
conver-
gence
théoriqueEstimateurs
d'erreur

Présentation

Estimateur de
RadauEstimateur
d'erreur avec
des
hypothèses
de régularité
faiblesComparaison
des 2
estimateurs

hp-raff.

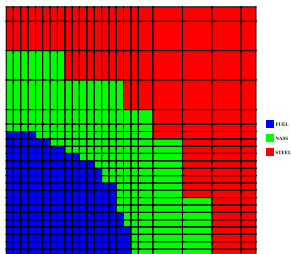
Présentation
Resultats sur
les cas MMSConclusions
et perspec-
tives

FIGURE: Description de la géométrie du coeur ZONA2B

ZONA2B

- fait partie d'un **programme experimental** réalisé au CEA Cadarache de 1994 à 1997
- contient **3 milieux** notés FUEL, NASS et STEEL
- est intéressant pour tester l'adaptation car les couvertures fertiles ont été remplacées par du réflecteur acier \implies **importantes variations du flux** aux interfaces

Contexte

Présentation
des types de
raffinementOrdre de
conver-
gence
théoriqueEstimateurs
d'erreurPrésentation
Estimateur de
RadauEstimateur
d'erreur avec
des
hypotheses
de régularité
faiblesComparaison
des 2
estimateurs

hp-raff.

Présentation
Resultats sur
les cas MMSConclusions
et perspec-
tives

Nom de la stratégie	h -raffinement	p -raffinement
2 estimateurs (hp_1)	$E^R(K) \leq \gamma$	$E^R(K) > \gamma$
2 estimateurs (mod) (hp_2)	$E^R(K) \leq \gamma$ et $p_K > 4$	$E^R(K) > \gamma$ ou $p_K \leq 4$
Type-parameter (hp^{TP})	$\frac{\tilde{E}_p^{DG}(K)}{\tilde{E}_{p-1}^{DG}(K)} \leq \gamma$	$\frac{\tilde{E}_p^{DG}(K)}{\tilde{E}_{p-1}^{DG}(K)} > \gamma$
Basique (hp^B)	$p_K > 4$	$p_K \leq 4$

TABLE: Stratégies de raffinement hp testées

Resultats sur les cas MMS

Contexte

Présentation
des types de
raffinementOrdre de
conver-
gence
théoriqueEstimateurs
d'erreur

Présentation

Estimateur de
RadauEstimateur
d'erreur avec
deshypotheses
de régularité
faiblesComparaison
des 2
estimateurs

hp-raff.

Présentation

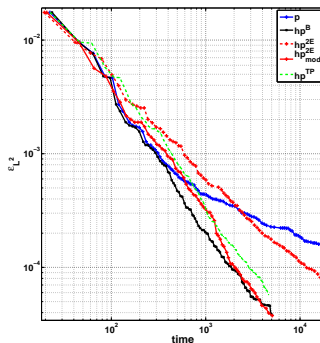
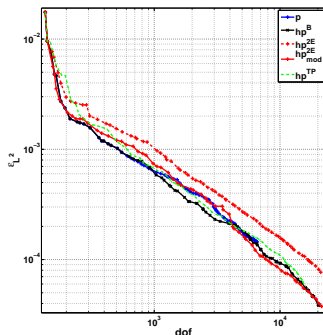
Resultats sur
les cas MMSConclusions
et perspec-
tives

FIGURE: Erreur L^2 versus dof (gauche) et temps (droite) pour le cas ZONA2B avec différentes stratégies

Contexte

Présentation
des types de
raffinementOrdre de
conver-
gence
théoriqueEstimateurs
d'erreurPrésentation
Estimateur de
RadauEstimateur
d'erreur avec
des
hypothèses
de régularité
faiblesComparaison
des 2
estimateurs*hp* – raff.Présentation
Résultats sur
les cas MMSConclusions
et perspec-
tives

Afin de mettre en place des stratégies de raffinement *hp* nous avons

- analysé et testé numériquement les ordres de convergence théorique
 - pour un raffinement en h : $\mathcal{O}(h^{\min(p+1,s)})$
 - pour un raffinement en p : $\mathcal{O}(p^{-s+\frac{1}{2}})$
- comparé le comportement de 2 estimateurs sur des cas dont la solution avait la même régularité que les cas réalistes
- déduit une stratégie pour choisir entre le h et le p
- testé cette stratégie et comparé à d'autres existantes dans la littérature

Contexte

Présentation
des types de
raffinementOrdre de
conver-
gence
théoriqueEstimateurs
d'erreurPrésentation
Estimateur de
RadauEstimateur
d'erreur avec
des
hypothèses
de régularité
faiblesComparaison
des 2
estimateurs*hp* – raff.Présentation
Résultats sur
les cas MMSConclusions
et perspec-
tives

Afin de mettre en place des stratégies de raffinement *hp* nous avons

- analysé et testé numériquement les ordres de convergence théorique
 - pour un raffinement en h : $\mathcal{O}(h^{\min(p+1,s)})$
 - pour un raffinement en p : $\mathcal{O}(p^{-s+\frac{1}{2}})$
- comparé le comportement de 2 estimateurs sur des cas dont la solution avait la même régularité que les cas réalistes
- déduit une stratégie pour choisir entre le h et le p
- testé cette stratégie et comparé à d'autres existantes dans la littérature

Contexte

Présentation
des types de
raffinementOrdre de
conver-
gence
théoriqueEstimateurs
d'erreurPrésentation
Estimateur de
RadauEstimateur
d'erreur avec
des
hypothèses
de régularité
faiblesComparaison
des 2
estimateurs*hp* – raff.Présentation
Résultats sur
les cas MMSConclusions
et perspec-
tives

Afin de mettre en place des stratégies de raffinement *hp* nous avons

- analysé et testé numériquement les ordres de convergence théorique
 - pour un raffinement en h : $\mathcal{O}(h^{\min(p+1,s)})$
 - pour un raffinement en p : $\mathcal{O}(p^{-s+\frac{1}{2}})$
- comparé le comportement de 2 estimateurs sur des cas dont la solution avait la même régularité que les cas réalistes
- déduit une stratégie pour choisir entre le h et le p
- testé cette stratégie et comparé à d'autres existantes dans la littérature

Finalement, le critère de sélection entre h et p ne paraît pas déterminant dans le cadre de l'équation de transport des neutrons. Il serait toutefois intéressant de tester cette stratégie sur des cas où la régularité est moins importante.

Contexte

Présentation
des types de
raffinementOrdre de
conver-
gence
théoriqueEstimateurs
d'erreurPrésentation
Estimateur de
RadauEstimateur
d'erreur avec
des
hypothèses
de régularité
faiblesComparaison
des 2
estimateurs*hp* – raff.Présentation
Résultats sur
les cas MMSConclusions
et perspec-
tives

Afin de mettre en place des stratégies de raffinement *hp* nous avons

- analysé et testé numériquement les ordres de convergence théorique
 - pour un raffinement en h : $\mathcal{O}(h^{\min(p+1,s)})$
 - pour un raffinement en p : $\mathcal{O}(p^{-s+\frac{1}{2}})$
- comparé le comportement de 2 estimateurs sur des cas dont la solution avait la même régularité que les cas réalistes
- déduit une stratégie pour choisir entre le h et le p
- testé cette stratégie et comparé à d'autres existantes dans la littérature

Merci pour votre attention
Questions ?