Couplage des écoulements souterrains avec le ruissellement
Méthodologie numérique et applications

Pierre Sochala*, Alexandre Ern**

* BRGM Orléans

**Ecole des Ponts, CERMICS, Paris

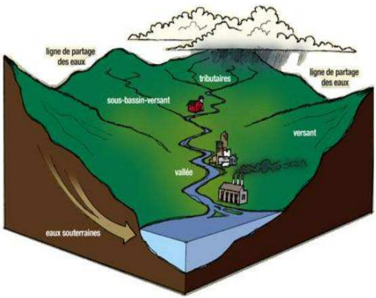
GDR Calcul

Paris, 5 - 6 Juillet 2011

Geoscience for a sustainable Earth brgm

Contexte général

Echelle plurikilométrique



Bassin versant :

- prédiction des crues
- pollution sols/nappes

Echelle décamétrique

Parcelle :

- remontée de nappe
- aménagements agricoles

Plan

- Ecoulements souterrains
  - équations diphasique eau-air
  - équation de Richards

$$\partial_t[\theta(\psi)] - \nabla \cdot (K(\psi)\nabla(\psi + z)) = 0$$

ψ : charge hydraulique

$$\begin{array}{lll} \psi \to -\infty & \to & \text{milieu désaturé} \\ \psi < 0 & \to & \text{milieu insaturé} \\ \psi \geq 0 & \to & \text{milieu saturé } (\theta = \theta_s \text{ et } K = K_s) \end{array}$$

  - modèle de Green-Ampt

- Ecoulements souterrains
  - équations diphasique eau-air
  - équation de Richards

$$\partial_t[\theta(\psi)] - \nabla \cdot (K(\psi)\nabla(\psi + z)) = 0$$

ψ : charge hydraulique

$$\begin{array}{lll} \psi \to -\infty & \to & \text{milieu désaturé} \\ \psi < 0 & \to & \text{milieu insaturé} \\ \psi \geq 0 & \to & \text{milieu saturé } (\theta = \theta_s \text{ et } K = K_s) \end{array}$$

  - modèle de Green-Ampt

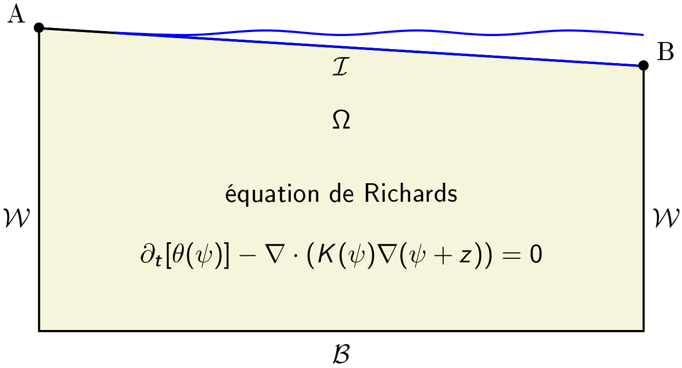
- Ecoulements superficiels
  - équations de Navier–Stokes à surface libre
  - équations de Saint–Venant
  - approximation de l'onde cinématique

$h \geq 0$: hauteur d'eau

Système couplé

Onde cinématique ou Saint–Venant

$$\partial_t h + \partial_x \varphi(h, S) = f_{\mathrm{sol}} + f_{\mathrm{pluie}}$$



Ω : domaine souterrain, $\mathcal{I}$: interface, $\mathcal{W}$: parois latérales et $\mathcal{B}$: bas

Conditions de couplage

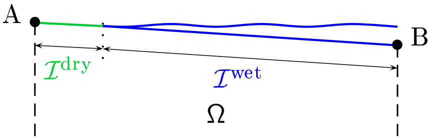
- Continuité de la pression et des flux d'eau
  Singh et Bhallamudi 98
  Esteves et al. 00
  Dawson 06
  Kollet et Maxwell 06
  Beaugendre et al. 06
- Continuité des vitesses normales et condition de Beavers–Joseph
  Jäger et Mikelic 00
  Discacciati et al. 02 03
- Discontinuité de la pression
  VanderKwaak et Loague 01

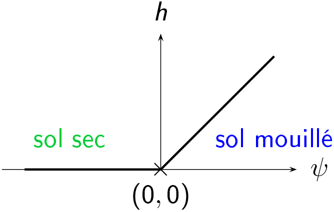
Conditions de couplage

1. Continuité du flux d'eau : $f_{\mathrm{sol}} = v(\psi) \cdot n_\Omega$
2. Continuité de la pression : ensemble $\mathcal{A} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{(\psi, h) \in \mathbb{R}^2,\ h = \psi_+\}$

   Partition de l'interface $\mathcal{I}$

$$\mathcal{I}^{\mathrm{wet}} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{x \in \mathcal{I},\ h(x) > 0\} \quad \text{and} \quad \mathcal{I}^{\mathrm{dry}} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{x \in \mathcal{I},\ h(x) = 0\}$$





Plan

Discrétisation spatiale de l'équation de Richards

- Différences finies (DF) - *Celia et Bouloutas 90, Woodward et Dawson 00*
- Volumes finis (VF) - *Manzini et Ferraris 04*
- Eléments finis (EF) - *Celia et Bouloutas 90, Lehmann et Ackerer 98*
- EF mixtes (EFM) - *Diersch et Perrochet 99, Knabner et Schneid 02*
- EF discontinus - *Bastian et Rivière 04, Klieber et Rivière 06*
  - localement conservative (VF et EFM)
  - ordre d'interpolation élevé $\longrightarrow$ p-raffinement (EF et EFM)
  - maillages non-coïncidants $\longrightarrow$ h-raffinement (VF)
  - structure bloc
  - coût numérique élevé

Formulation faible locale de la méthode SIPG

$$\int_\tau \partial_t[\theta(\psi_\mathfrak{h})]\phi + \int_\tau K(\psi_\mathfrak{h})\nabla\psi_\mathfrak{h}\cdot\nabla\phi + \int_{\partial\tau} K(\psi_\mathfrak{h}|_\tau)\nabla\phi\cdot n_\tau(\mathrm{F}_\psi - \psi_\mathfrak{h}|_\tau)$$
$$+\int_{\partial\tau}\mathrm{F}_u\cdot n_\tau\phi = -\int_\tau K(\psi_\mathfrak{h})e_z\nabla\phi + \int_{\partial\tau} K(\psi_\mathfrak{h}|_\tau)e_z\ \phi\ n_\tau$$

Flux scalaire $\widehat{\mathrm{F}}_\psi|_F = \begin{cases} \{\psi_\mathfrak{h}\}_F & F\in\mathcal{F}_\mathfrak{h}^{\mathrm{i}} \\ 0 & F\in\mathcal{F}_\mathfrak{h}^{\mathrm{D}} \\ \psi_\mathfrak{h} & F\in\mathcal{F}_\mathfrak{h}^{\mathrm{N}} \end{cases}$

Flux vectoriel $\widehat{\mathrm{F}}_u|_F = \begin{cases} -\{K(\psi_\mathfrak{h})\nabla\psi_\mathfrak{h}\}_F + \eta K_{\mathrm{s}} d_F^{-1}[\![\psi_\mathfrak{h}]\!]_F n_F & F\in\mathcal{F}_\mathfrak{h}^{\mathrm{i}} \\ -\ K(\psi_\mathfrak{h})\nabla\psi_\mathfrak{h} + \eta K_{\mathrm{s}} d_F^{-1}\psi_\mathfrak{h} n_\Omega & F\in\mathcal{F}_\mathfrak{h}^{\mathrm{D}} \\ 0 & F\in\mathcal{F}_\mathfrak{h}^{\mathrm{N}} \end{cases}$

$\eta > 0 \rightarrow$ paramètre de pénalisation

Réécriture $\displaystyle\int_\tau \partial_t[\theta(\psi_\mathfrak{h})]\phi + a_\tau(\psi_\mathfrak{h},\phi) = b_\tau(\psi_\mathfrak{h},\phi)$

Discrétisation en temps - Backward Differentiation Formulae

$$\left(\frac{\partial \chi}{\partial t}\right)^n \overset{BDFq}{\simeq} \frac{1}{\delta t}\sum_{r=0}^{q} \alpha_r^q \chi^{n-r}$$

- Schéma implicite
- Inconditionnellement stable si les vp sont réelles négatives
- Facile d'implémenter des ordres élevés
- Plus rapide que les autres schémas implicites (DIRK, Adams)
- Initialisation
- Stockage

Discrétisation en temps - Backward Differentiation Formulae

$$\left(\frac{\partial \chi}{\partial t}\right)^n \overset{BDFq}{\simeq} \frac{1}{\delta t}\sum_{r=0}^{q} \alpha_r^q \chi^{n-r} \overset{BDF2}{=} \frac{1}{\delta t}\left(\frac{3}{2}\chi^n - 2\chi^{n-1} + \frac{1}{2}\chi^{n-2}\right)$$

- Schéma implicite
- Inconditionnellement stable si les vp sont réelles négatives
- Facile d'implémenter des ordres élevés
- Plus rapide que les autres schémas implicites (DIRK, Adams)
- Initialisation
- Stockage

Discrétisation en temps - Backward Differentiation Formulae

$$\left(\frac{\partial \chi}{\partial t}\right)^n \overset{BDFq}{\simeq} \frac{1}{\delta t}\sum_{r=0}^{q} \alpha_r^q \chi^{n-r} \overset{BDF2}{=} \frac{1}{\delta t}\left(\frac{3}{2}\chi^n - 2\chi^{n-1} + \frac{1}{2}\chi^{n-2}\right)$$

- Schéma implicite
- Inconditionnellement stable si les vp sont réelles négatives
- Facile d'implémenter des ordres élevés
- Plus rapide que les autres schémas implicites (DIRK, Adams)
- Initialisation
- Stockage

Système non-linéaire en $\psi_{\mathfrak{h}}^n$

$$\frac{\alpha_0^q}{\delta t}\int_\tau \theta(\psi_{\mathfrak{h}}^n)\phi + a_\tau(\psi_{\mathfrak{h}}^n, \phi) = b_\tau(\psi_{\mathfrak{h}}^n, \phi) - \sum_{r=1}^{q} \frac{\alpha_r^q}{\delta t}\int_\tau \theta(\psi_{\mathfrak{h}}^{n-r})\phi$$

Discrétisation en temps - Backward Differentiation Formulae

$$\left(\frac{\partial \chi}{\partial t}\right)^n \overset{BDFq}{\simeq} \frac{1}{\delta t}\sum_{r=0}^{q} \alpha_r^q \chi^{n-r} \overset{BDF2}{=} \frac{1}{\delta t}\left(\frac{3}{2}\chi^n - 2\chi^{n-1} + \frac{1}{2}\chi^{n-2}\right)$$

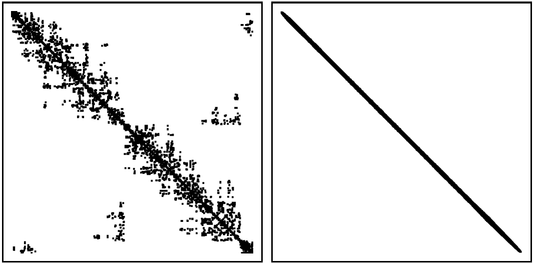
- Schéma implicite
- Inconditionnellement stable si les vp sont réelles négatives
- Facile d'implémenter des ordres élevés
- Plus rapide que les autres schémas implicites (DIRK, Adams)
- Initialisation
- Stockage

Système non-linéaire en $\psi_{\mathfrak{h}}^n$ $\rightarrow$ linéarisation du terme $\theta(\psi_{\mathfrak{h}}^n)$

$$\frac{\alpha_0^q}{\delta t}\int_\tau \theta(\psi_{\mathfrak{h}}^n)\phi + a_\tau(\psi_{\mathfrak{h}}^n, \phi) = b_\tau(\psi_{\mathfrak{h}}^n, \phi) - \sum_{r=1}^{q} \frac{\alpha_r^q}{\delta t}\int_\tau \theta(\psi_{\mathfrak{h}}^{n-r})\phi$$

Optimisation

- Renumérotation (Cuthill–McKee)



- initialisation d'ordre 2 : $\psi_{\mathfrak{h}}^{1,0} = \psi_{\mathfrak{h}}^{0}$

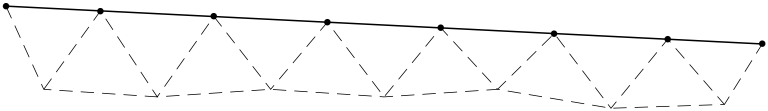
$$\psi_{\mathfrak{h}}^{2,0} = 2\psi_{\mathfrak{h}}^{1} - \psi_{\mathfrak{h}}^{0}$$

$$\forall n \geq 3,\ \ \psi_{\mathfrak{h}}^{n,0} = 3\psi_{\mathfrak{h}}^{n-1} - 3\psi_{\mathfrak{h}}^{n-2} + \psi_{\mathfrak{h}}^{n-3}$$

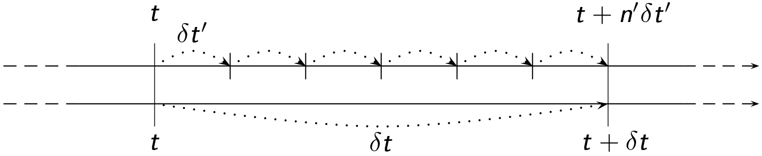
Diminution du temps CPU de 65%

Discrétisation des écoulements de surface

- Schéma VF explicite : flux de Godunov pour l'onde cinématique
  flux HLLE pour SV
- Trace du maillage $\mathcal{T}_{\mathfrak{h}}$ sur l'interface $\mathcal{I}$



- Pas de temps $\delta t' \leq \delta t$ pour vérifier la condition CFL



Plan

Notations

Partitionnement non connexe des faces $\mathcal{F}_\mathfrak{h}$ l'interface $\mathcal{I}$

$$\mathcal{I}_\mathfrak{h}^{\mathrm{wet}} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{F \in \mathcal{F}_\mathfrak{h},\ F \subset \mathcal{I}^{\mathrm{wet}}\} \quad \text{et} \quad \mathcal{I}_\mathfrak{h}^{\mathrm{dry}} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{F \in \mathcal{F}_\mathfrak{h},\ F \subset \mathcal{I}^{\mathrm{dry}}\}$$

$\psi_\mathfrak{h} \leftarrow \texttt{Richards\_BDFq}\ (\mathcal{I}_\mathfrak{h}^{\mathrm{dry}}, \mathcal{I}_\mathfrak{h}^{\mathrm{wet}}, \omega_v, \omega_\psi)$: résolution de l'équation de Richards par la méthode BDFqDG en imposant ω_v sur $\mathcal{I}_\mathfrak{h}^{\mathrm{dry}}$ et ω_ψ sur $\mathcal{I}_\mathfrak{h}^{\mathrm{wet}}$

$h_\mathfrak{h} \leftarrow \texttt{Ruissellement}(f_{\mathrm{sol}}, f_{\mathrm{pluie}})$: résolution de l'onde cinématique ou de Saint–Venant par une méthode de VF explicite

$v_\mathfrak{h}^\star \leftarrow \texttt{Vitesse\_Normale}(\mathcal{I}_\mathfrak{h}^{\mathrm{dry}}, \mathcal{I}_\mathfrak{h}^{\mathrm{wet}}, \omega_v, \omega_\psi, \psi_\mathfrak{h}^{n-1})$: évaluation de la vitesse normale à l'interface

$$v_\mathfrak{h}^\star|_F \stackrel{\mathrm{def}}{=} \begin{cases} \omega_v|_F & F \in \mathcal{I}_\mathfrak{h}^{\mathrm{dry}} \\ v(\psi_\mathfrak{h})|_F \cdot n_\Omega + \eta K_s d_F^{-1}(\psi_\mathfrak{h}|_F - \omega_\psi|_F) & F \in \mathcal{I}_\mathfrak{h}^{\mathrm{wet}} \end{cases}$$

Algorithme de couplage

1. **Initialisation**
   Prédiction du ruissellement avec $f_{\mathrm{sol}} = 0$

2. **Itérations**
   Partition de l'interface
   $\longrightarrow$ une face mouillée peut devenir sèche mais pas l'inverse
   $\longrightarrow$ changement de topologie au cours des itérations

   Choix des CL suivant la hauteur d'eau
   Résolution de l'équation de Richards
   Evaluation du terme source f_{sol}
   Correction de la hauteur d'eau ($f_{\mathrm{sol}} \neq 0$)

3. **Critère d'arrêt**
   $(\psi, h) \in \tilde{\mathcal{A}}$ (approximation en $\mathcal{O}(\delta t)$ de $\mathcal{A}$)
   $\longrightarrow$ pas d'oscillations

Algorithme de couplage à un pas

Entrées : $\psi_{\mathfrak{h}}^{n-1}$ et $h_{\mathfrak{h}}^{n-1}$

$\tilde{h}_{\mathfrak{h}}^{n} \leftarrow \texttt{Ruissellement}(0, f_{\mathrm{pluie}})$

$p = 0 \quad \text{et} \quad h_{\mathfrak{h}}^{n,1} = \tilde{h}_{\mathfrak{h}}^{n}$

Répéter

$p \leftarrow p + 1$

$\mathcal{I}_{\mathfrak{h}}^{\mathrm{dry},n,p} \leftarrow \{e_i \in \mathcal{F}_{\mathfrak{h}},\ \exists k \leq p,\ h_i^{n,k} < 0\}$ et $\mathcal{I}_{\mathfrak{h}}^{\mathrm{wet},n,p} \leftarrow \mathcal{I}_{\mathfrak{h}} \backslash \mathcal{I}_{\mathfrak{h}}^{\mathrm{dry},n,p}$

$\omega_v^{n,p} \leftarrow -\tilde{h}_{\mathfrak{h}}^{n}/\delta t$ sur $\mathcal{I}_{\mathfrak{h}}^{\mathrm{dry},n,p}$ et $\omega_\psi^{n,p} \leftarrow \tilde{h}_{\mathfrak{h}}^{n}$ sur $\mathcal{I}_{\mathfrak{h}}^{\mathrm{wet},n,p}$

$\psi_{\mathfrak{h}}^{n,p} \leftarrow \texttt{Richards\_BDF1}(\mathcal{I}_{\mathfrak{h}}^{\mathrm{dry},n,p}, \mathcal{I}_{\mathfrak{h}}^{\mathrm{wet},n,p}, \omega_v^{n,p}, \omega_\psi^{n,p})$

$v_{\mathfrak{h}}^{\star,n,p} \leftarrow \texttt{Vitesse\_Normale}(\mathcal{I}_{\mathfrak{h}}^{\mathrm{dry},n,p}, \mathcal{I}_{\mathfrak{h}}^{\mathrm{wet},n,p}, \omega_v^{n,p}, \omega_\psi^{n,p}, \psi_{\mathfrak{h}}^{n,p})$

$\forall i \leq N_{\mathcal{I}}, h_i^{n,p+1} = \tilde{h}_i^{n} + \delta t / l_i \int_{e_i} v_{\mathfrak{h}}^{\star,n,p}$

jusqu'à $\forall i \leq N_{\mathcal{I}}, h_i^{n,p} \geq 0$

Sorties : $\psi_{\mathfrak{h}}^{n} = \psi_{\mathfrak{h}}^{n,p}$ et $h_{\mathfrak{h}}^{n} = h_{\mathfrak{h}}^{n,p}$

Propriétés de l'algorithme

- Hauteur d'eau positive

$$\forall F \in \mathcal{I}_{\mathfrak{h}}, \quad h_{\mathfrak{h}}^{n}|_F \geq 0$$

- Approximation de l'ensemble admissible $\mathcal{A}$

$$\forall F \in \mathcal{I}_{\mathfrak{h}}^{\mathrm{wet},n},\ \psi_{\mathfrak{h}}^{n}|_F = \tilde{h}_{\mathfrak{h}}^{n}|_F \quad \text{et} \quad \forall F \in \mathcal{I}_{\mathfrak{h}}^{\mathrm{dry},n},\ \psi_{\mathfrak{h}}^{n}|_F \leq \tilde{h}_{\mathfrak{h}}^{n}|_F$$

- Multiples zones d'affleurements sur l'interface
- Partitionnement différent si infiltration sur l'ensemble de l'interface

Propriétés de l'algorithme

- Hauteur d'eau positive

$$\forall F \in \mathcal{I}_{\mathfrak{h}}, \quad h_{\mathfrak{h}}^{n}|_{F} \geq 0$$

- Approximation de l'ensemble admissible $\mathcal{A}$

$$\forall F \in \mathcal{I}_{\mathfrak{h}}^{\mathrm{wet},n},\ \psi_{\mathfrak{h}}^{n}|_{F} = \tilde{h}_{\mathfrak{h}}^{n}|_{F} \quad \text{et} \quad \forall F \in \mathcal{I}_{\mathfrak{h}}^{\mathrm{dry},n},\ \psi_{\mathfrak{h}}^{n}|_{F} \leq \tilde{h}_{\mathfrak{h}}^{n}|_{F}$$

- Multiples zones d'affleurements sur l'interface
- Partitionnement différent si infiltration sur l'ensemble de l'interface
- Y-a-t'il conservation de la masse totale du système ?
  - DG pour les écoulements souterrains
  - VF pour les écoulements superficiels

Conservation de la masse - BDF1

Bilan de masse des écoulements souterrains avec la BDF1 :

$$V^n_{\mathrm{grnd}} - V^{n-1}_{\mathrm{grnd}} = \left(F^n_{\mathcal{I}} + F^n_{\mathcal{WB}}\right)\delta t + \mathcal{O}(\epsilon)$$

Bilan de masse des écoulements superficiels :

$$V^n_{\mathrm{over}} - V^{n-1}_{\mathrm{over}} = \left(-F^n_{\mathcal{I}} + F^n_{\mathrm{ABr}}\right)\delta t$$

Bilan de masse total du système :

$$V^n - V^{n-1} = \left(F^n_{\mathcal{WB}} + F^n_{\mathrm{ABr}}\right)\delta t + \mathcal{O}(\epsilon)$$

Conservation de la masse - BDF1

Bilan de masse des écoulements souterrains avec la BDF1 :

$$V^n_{\mathrm{grnd}} - V^{n-1}_{\mathrm{grnd}} = \left(F^n_{\mathcal{I}} + F^n_{\mathcal{WB}}\right)\delta t + \mathcal{O}(\epsilon)$$

Bilan de masse des écoulements superficiels :

$$V^n_{\mathrm{over}} - V^{n-1}_{\mathrm{over}} = \left(-F^n_{\mathcal{I}} + F^n_{\mathrm{ABr}}\right)\delta t$$

Bilan de masse total du système :

$$V^n - V^{n-1} = \left(F^n_{\mathcal{WB}} + F^n_{\mathrm{ABr}}\right)\delta t + \mathcal{O}(\epsilon)$$

Soient δV^n et ΔV^n les défauts de volume sur $[(n-1)\delta t, n\delta t]$ et $[0, N\delta t]$

$$\delta V^n \stackrel{\mathrm{def}}{=} V^n - V^{n-1} - (F^n_{\mathcal{WB}} + F^n_{\mathrm{ABr}})\delta t \quad \text{et} \quad \triangle V^N \stackrel{\mathrm{def}}{=} \sum_{n=1}^{N} \delta V^n$$

$$\text{Alors} \quad |\triangle V^N| \leq N\mathcal{O}(\epsilon)$$

Conservation de la masse - BDF2

Bilan de masse des écoulements souterrains avec la BDF2 :

$$\frac{3}{2}V_{\mathrm{grnd}}^{n} - 2V_{\mathrm{grnd}}^{n-1} + \frac{1}{2}V_{\mathrm{grnd}}^{n-2} = \left(F_{\mathcal{I}}^{n} + F_{\mathcal{WB}}^{n}\right)\delta t + \mathcal{O}(\epsilon)$$

Bilan de masse des écoulements superficiels :

$$V_{\mathrm{over}}^{n} - V_{\mathrm{over}}^{n-1} = \left(-\Phi_{\mathcal{I}}^{n} + F_{\mathrm{ABr}}^{n}\right)\delta t$$

Conservation de la masse - BDF2

Bilan de masse des écoulements souterrains avec la BDF2 :

$$\frac{3}{2} V_{\mathrm{grnd}}^{n} - 2 V_{\mathrm{grnd}}^{n-1} + \frac{1}{2} V_{\mathrm{grnd}}^{n-2} = \big(F_{\mathcal{I}}^{n} + F_{\mathcal{WB}}^{n}\big)\delta t + \mathcal{O}(\epsilon)$$

Bilan de masse des écoulements superficiels :

$$V_{\mathrm{over}}^{n} - V_{\mathrm{over}}^{n-1} = \big(- \Phi_{\mathcal{I}}^{n} + F_{\mathrm{ABr}}^{n}\big)\delta t$$

Relation de récurrence entre les flux

$$\Phi_{\mathcal{I}}^{n} = \frac{2}{3} F_{\mathcal{I}}^{n} + \frac{1}{3} \Phi_{\mathcal{I}}^{n-1}$$

Conservation de la masse - BDF2

Bilan de masse des écoulements souterrains avec la BDF2 :

$$\frac{3}{2}V^{n}_{\mathrm{grnd}} - 2V^{n-1}_{\mathrm{grnd}} + \frac{1}{2}V^{n-2}_{\mathrm{grnd}} = \big(F^{n}_{\mathcal{I}} + F^{n}_{\mathcal{WB}}\big)\delta t + \mathcal{O}(\epsilon)$$

Bilan de masse des écoulements superficiels :

$$V^{n}_{\mathrm{over}} - V^{n-1}_{\mathrm{over}} = \big(-\Phi^{n}_{\mathcal{I}} + F^{n}_{\mathrm{ABr}}\big)\delta t$$

Relation de récurrence entre les flux

$$\Phi^{n}_{\mathcal{I}} = \frac{2}{3}F^{n}_{\mathcal{I}} + \frac{1}{3}\Phi^{n-1}_{\mathcal{I}}$$

Propriété de conservation de la masse

$$|\triangle V^{N}| \leq \frac{1}{2}|\delta V^{1}| + N\mathcal{O}(\epsilon)$$

Couplage à deux pas

Entrées : $\psi_\mathfrak{h}^{n-1}, \psi_\mathfrak{h}^{n-2}$ et $h_\mathfrak{h}^{n-1}$

$\vdots$

Répéter

$\vdots$

$\omega_v^{n,p} \leftarrow -(3\tilde{h}_\mathfrak{h}^n/\delta t + v_\mathfrak{h}^{\star,n-1})/2$ sur $\mathcal{I}_\mathfrak{h}^{\mathrm{dry},n,p}$

$\psi_\mathfrak{h}^{n,p} \leftarrow \texttt{Richards\_BDF2}(\mathcal{I}_\mathfrak{h}^{\mathrm{dry},n,p}, \mathcal{I}_\mathfrak{h}^{\mathrm{wet},n,p}, \omega_v^{n,p}, \omega_\psi^{n,p}, \psi_\mathfrak{h}^{n-1}, \psi_\mathfrak{h}^{n-2})$

$\vdots$

$\forall i \leq N_\mathcal{I},\;\; h_i^{n,p} = \tilde{h}_i^n + \delta t/l_i \int_{e_i} (2v_\mathfrak{h}^{\star,n,p} + v_\mathfrak{h}^{\star,n-1})/3$

$\vdots$

jusqu'à $\forall i \leq N_\mathcal{I}, h_i^{n,p} \geq 0$

$\vdots$

$v_\mathfrak{h}^{\star,n} = v_\mathfrak{h}^{\star,n,p}$

Sorties : $\psi_\mathfrak{h}^n, h_\mathfrak{h}^n$ et $v_\mathfrak{h}^{\star,n}$

Plan

Modélisation

Discrétisation

Algorithme de couplage

Résultats

Validation de l'algorithme

Tests de Validation :

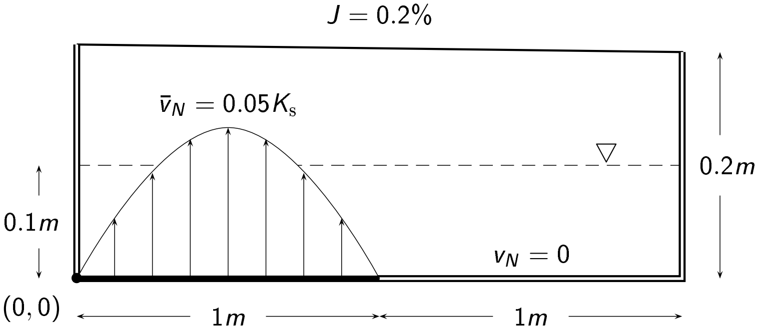
- asséchement
- ruissellement dû à la pluie
- injection d'eau dans le sol
- ruissellement hortonien
- transfert entre sillons

Test de comparaison avec les mesures expérimentales :

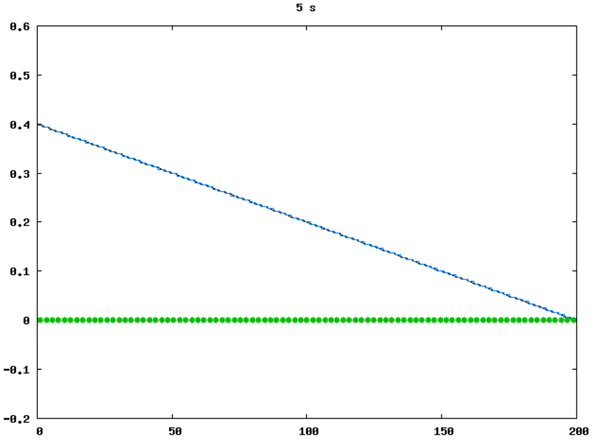
- Etude d'une parcelle drainée

Injection d'eau

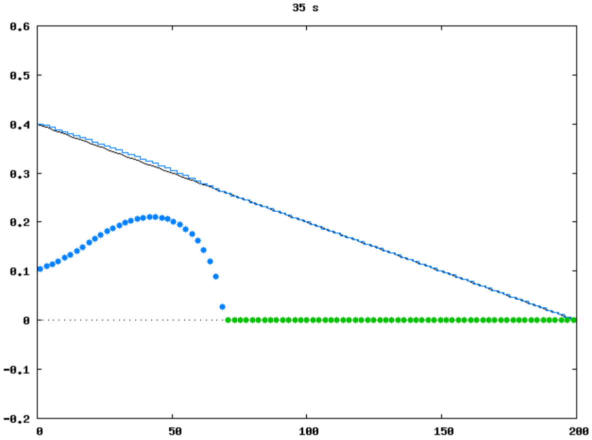
Cas test de 6 minutes avec $\delta t = \delta t' = 1s$



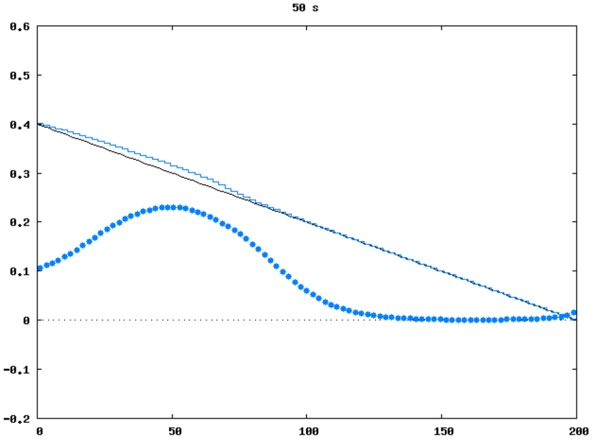
Injection d'eau - hauteur d'eau et flux



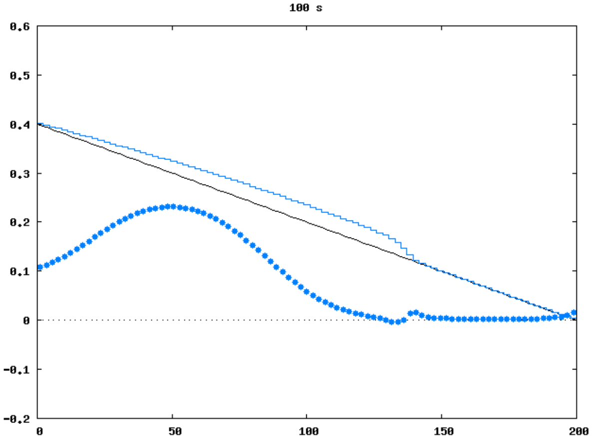
Injection d'eau - hauteur d'eau et flux



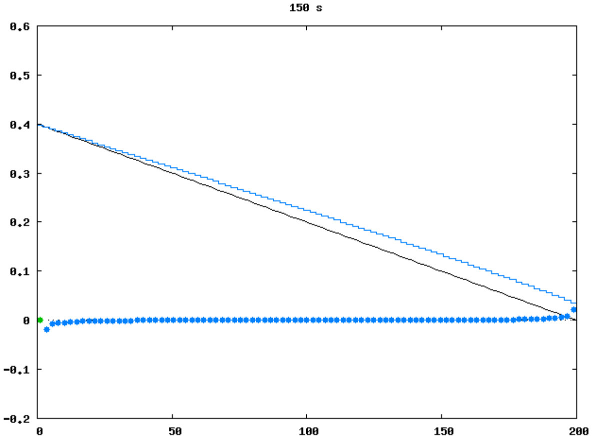
Injection d'eau - hauteur d'eau et flux



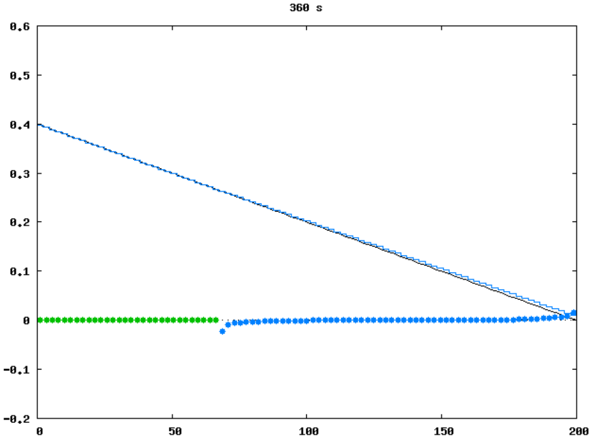
Injection d'eau - hauteur d'eau et flux



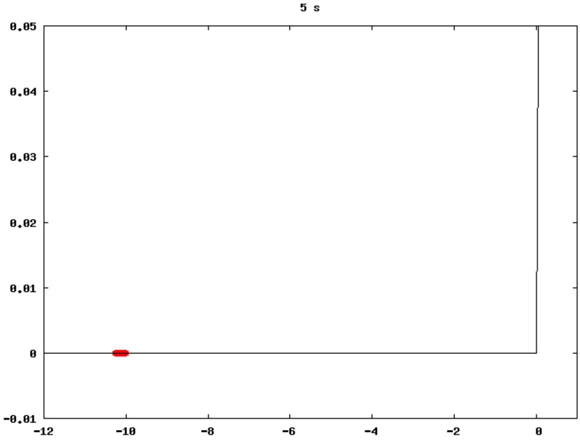
Injection d'eau - hauteur d'eau et flux



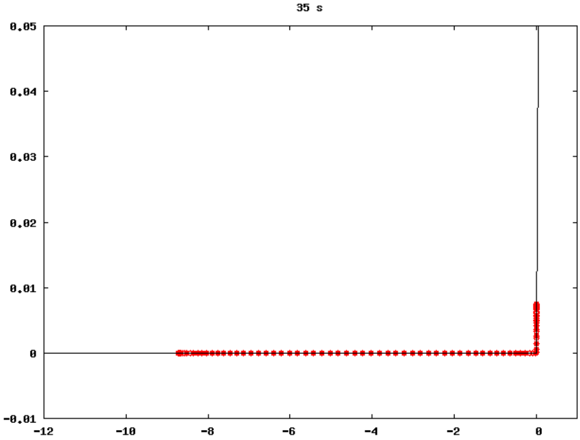
Injection d'eau - hauteur d'eau et flux



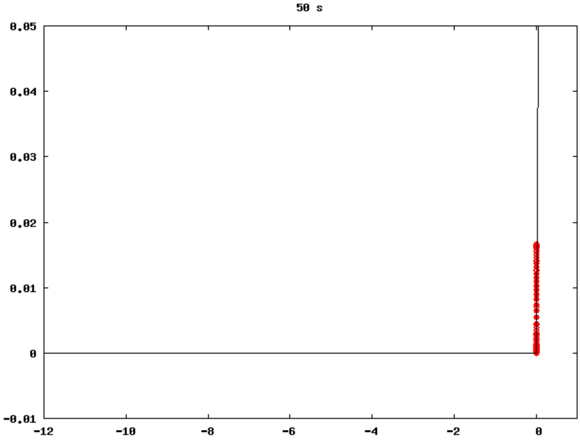
Injection d'eau - nuage de points



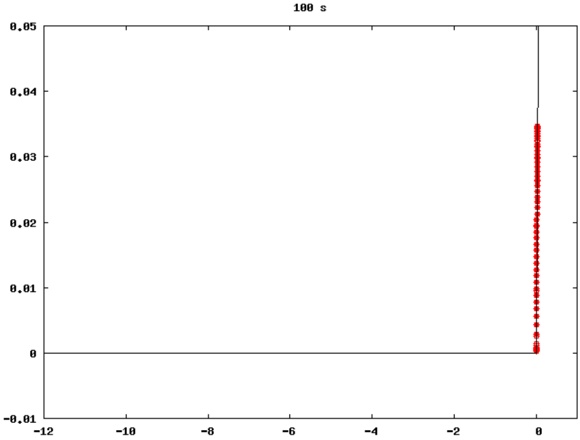
Injection d'eau - nuage de points



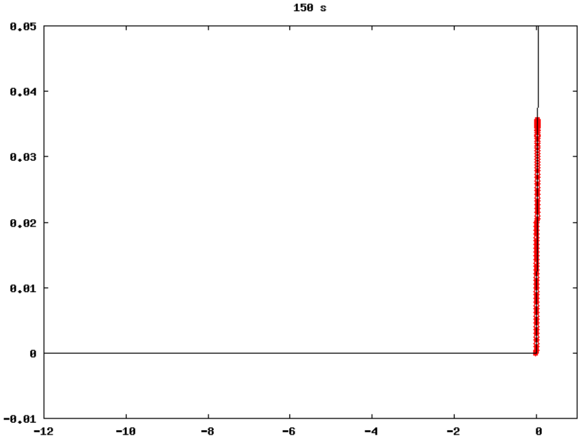
Injection d'eau - nuage de points



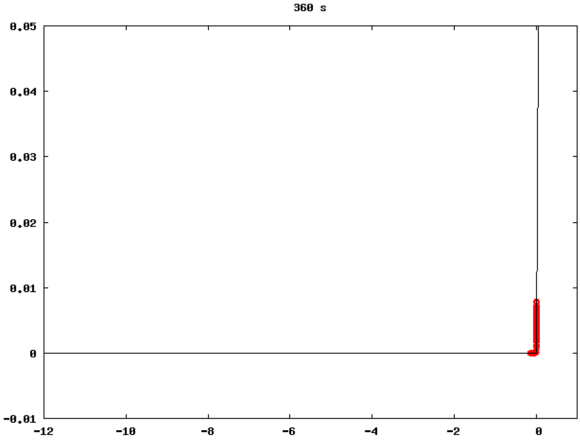
Injection d'eau - nuage de points



Injection d'eau - nuage de points

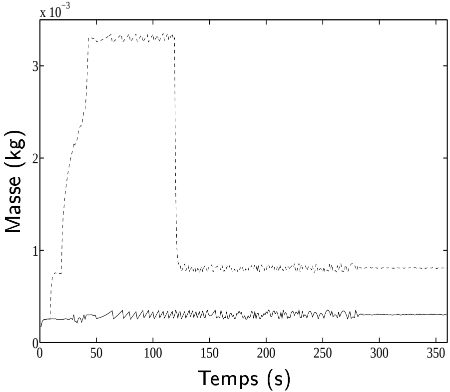


Injection d'eau - nuage de points



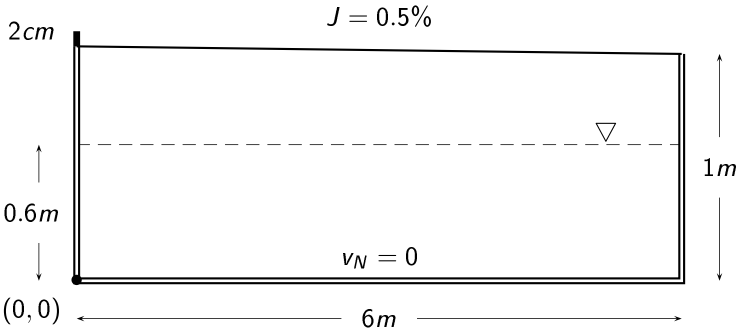
Injection d'eau

Erreurs sur la conservation de la masse avec la BDF2
sans (---) et avec (—) modification des flux

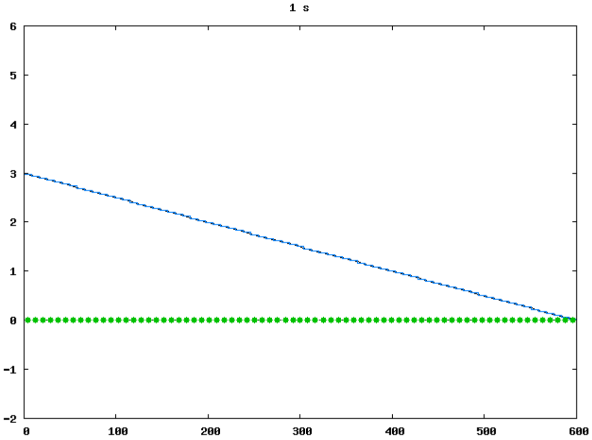


Ruissellement hortonien

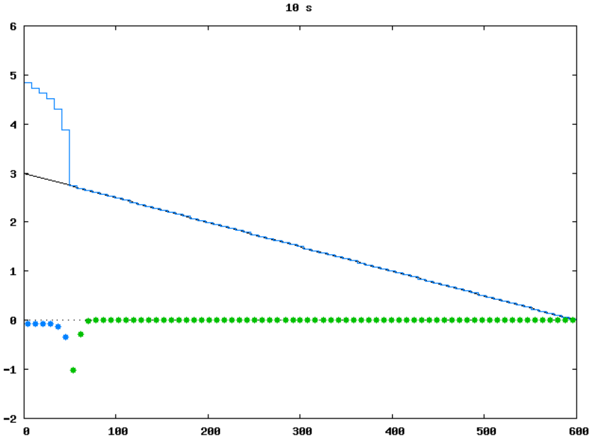
Cas test de 1 minute avec $\delta t = 1s$ et $\delta t' = 0.1s$



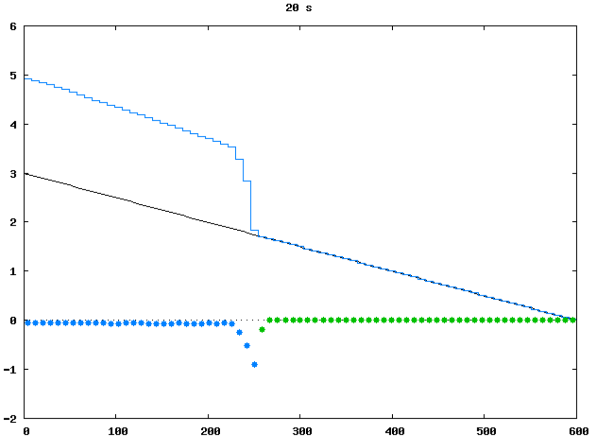
Ruissellement hortonien - hauteur d'eau et flux



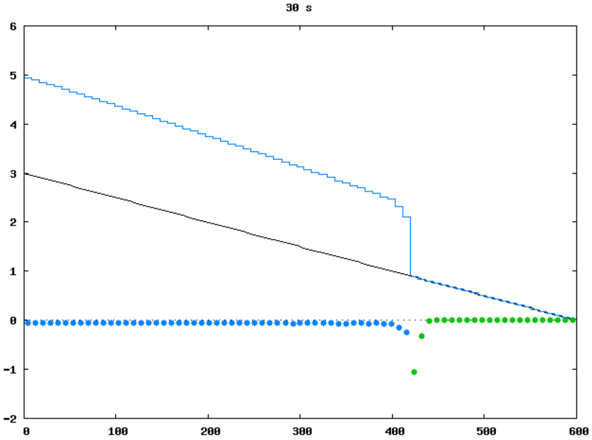
Ruissellement hortonien - hauteur d'eau et flux



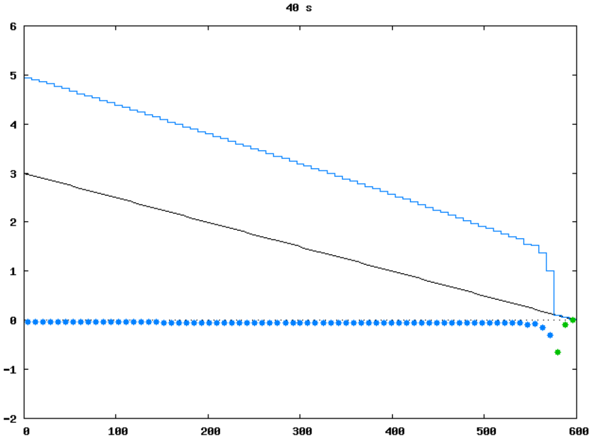
Ruissellement hortonien - hauteur d'eau et flux



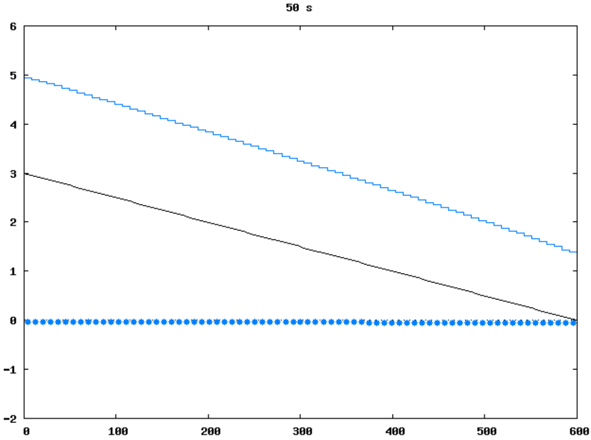
Ruissellement hortonien - hauteur d'eau et flux



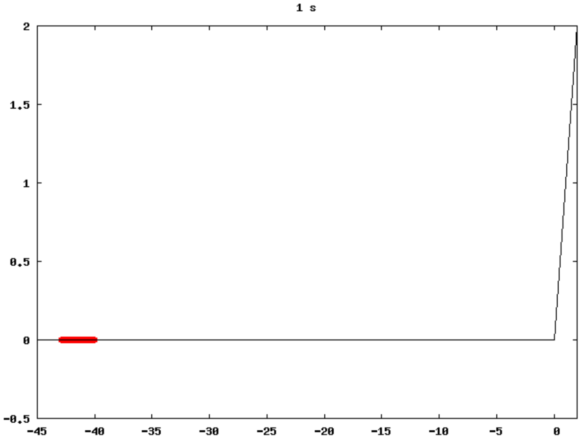
Ruissellement hortonien - hauteur d'eau et flux



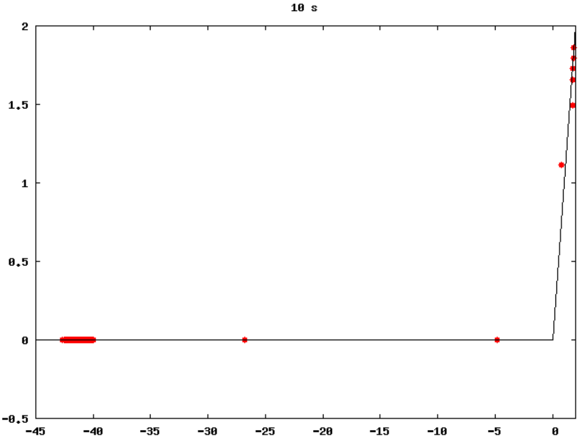
Ruissellement hortonien - hauteur d'eau et flux



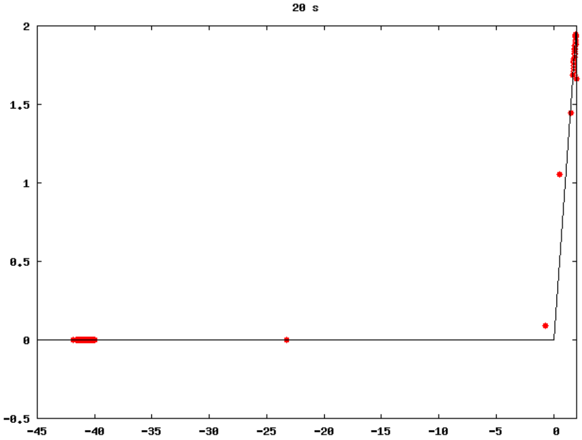
Ruissellement hortonien - nuage de points



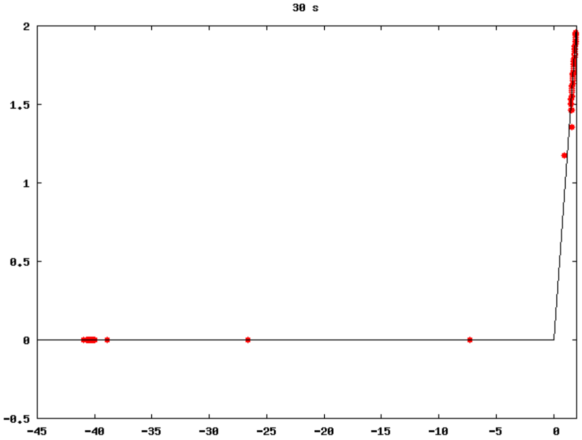
Ruissellement hortonien - nuage de points



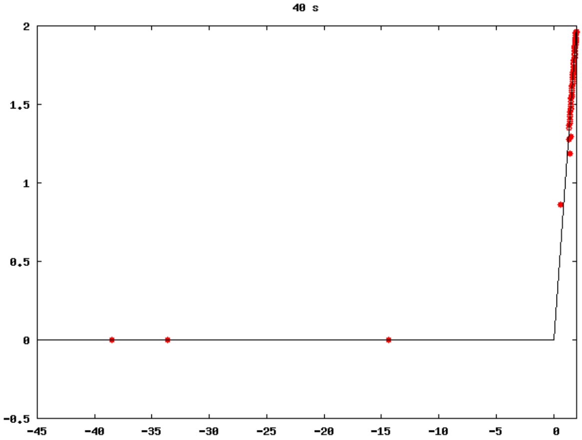
Ruissellement hortonien - nuage de points



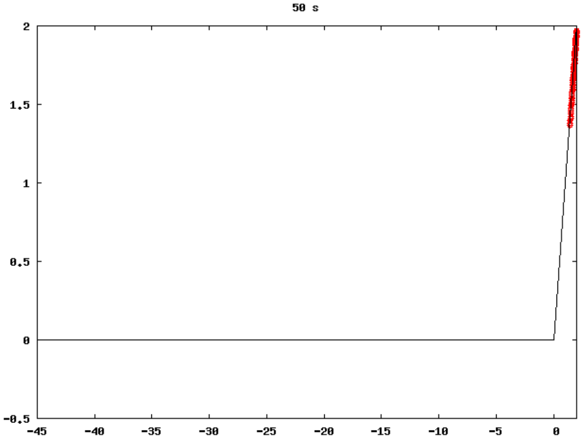
Ruissellement hortonien - nuage de points



Ruissellement hortonien - nuage de points

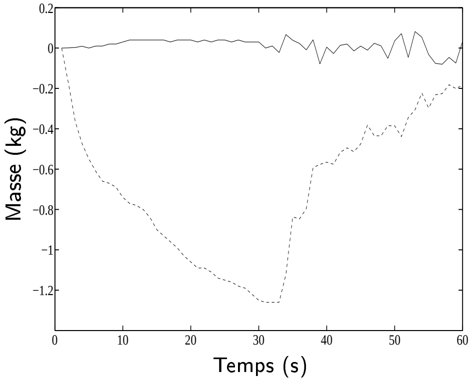


Ruissellement hortonien - nuage de points



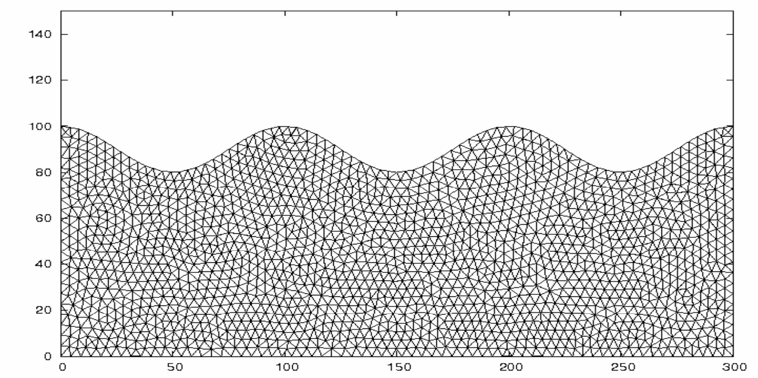
Ruissellement hortonien

Erreurs sur la conservation de la masse avec la BDF2
sans (---) et avec (—) modification des flux

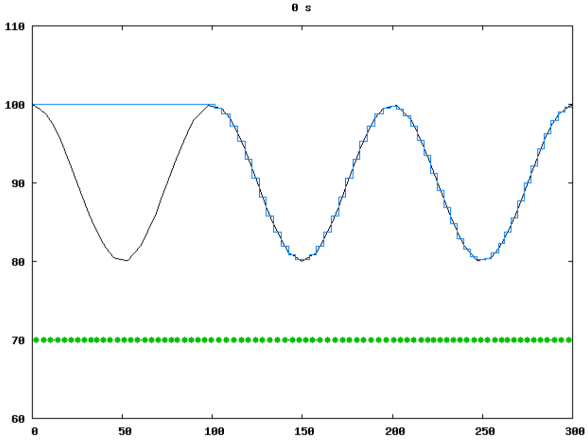


Transfert entre sillons

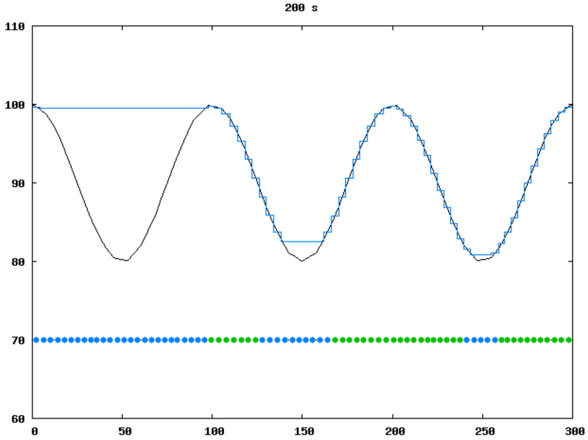
Temps total de simulation 2 heures avec $\delta t_{\mathrm{Ric}} = 2s$ et $\delta t_{\mathrm{SV}} = 0.2s$



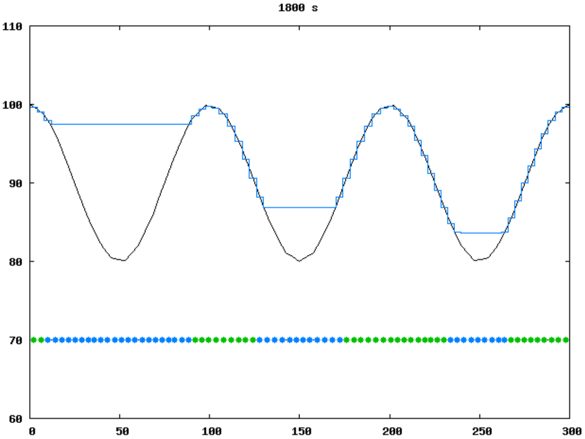
Transfert entre sillons - hauteur d'eau et flux



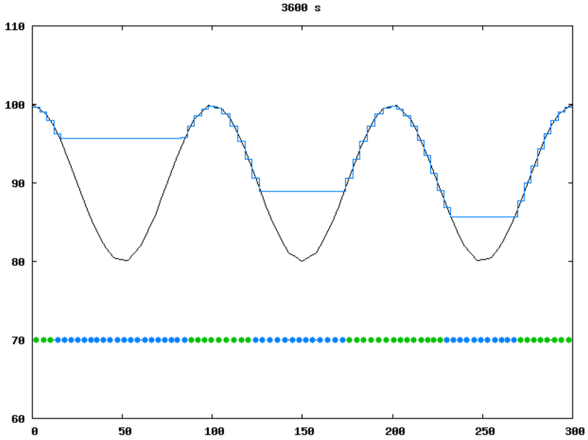
Transfert entre sillons - hauteur d'eau et flux



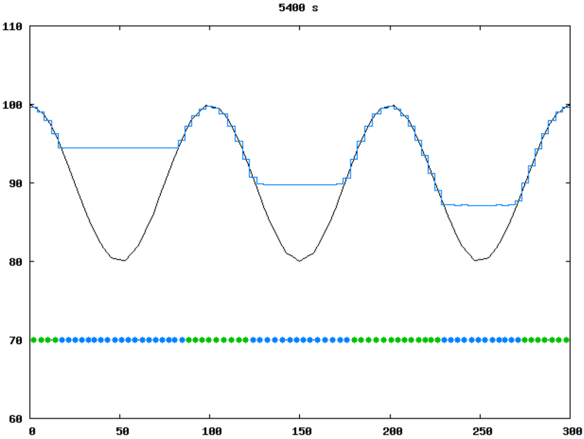
Transfert entre sillons - hauteur d'eau et flux



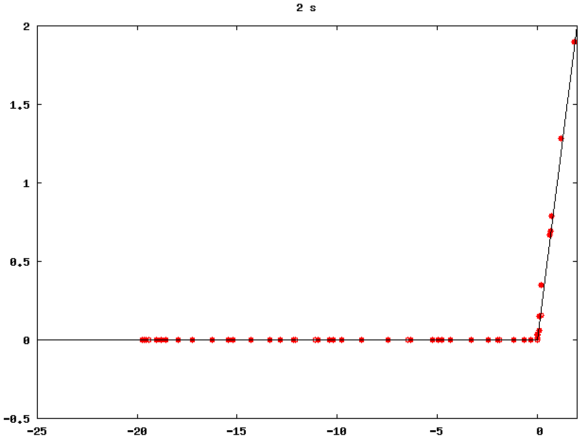
Transfert entre sillons - hauteur d'eau et flux



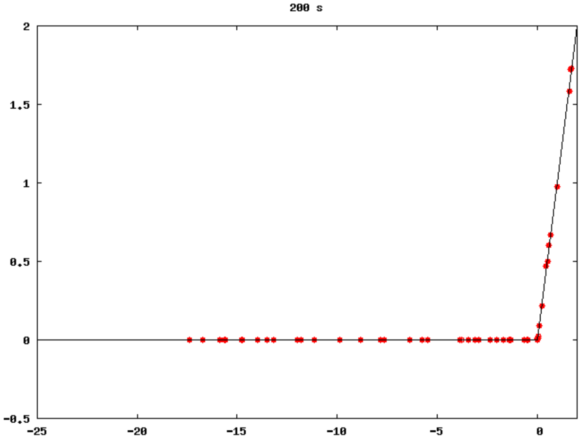
Transfert entre sillons - hauteur d'eau et flux



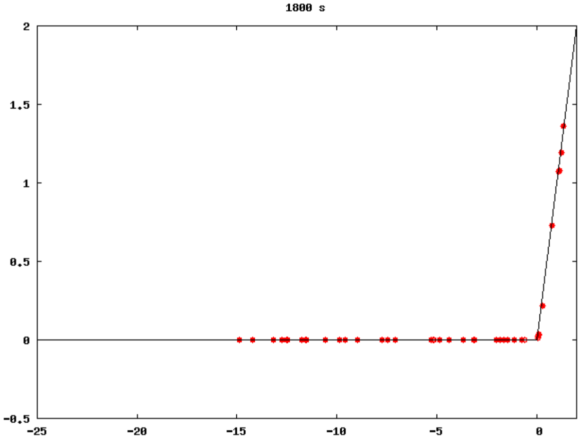
Transfert entre sillons - nuage de points



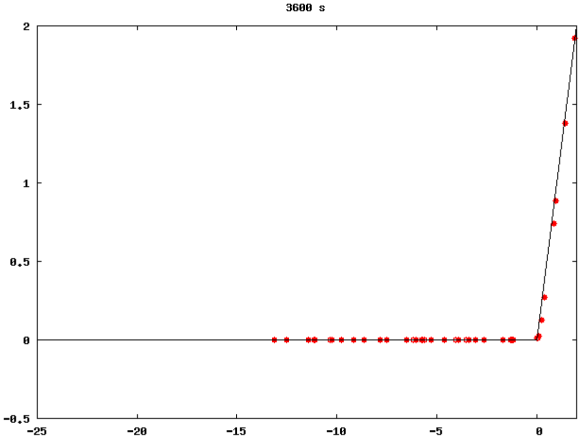
Transfert entre sillons - nuage de points



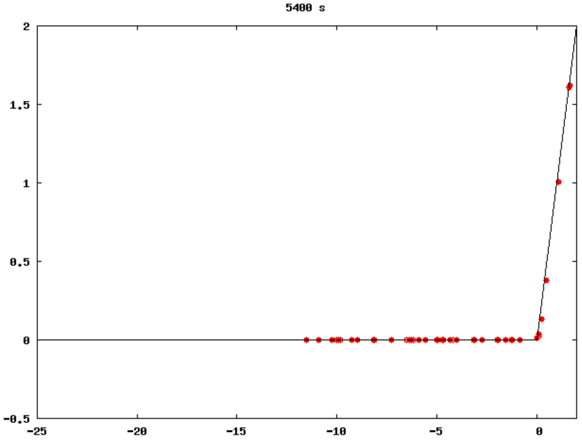
Transfert entre sillons - nuage de points



Transfert entre sillons - nuage de points



Transfert entre sillons - nuage de points

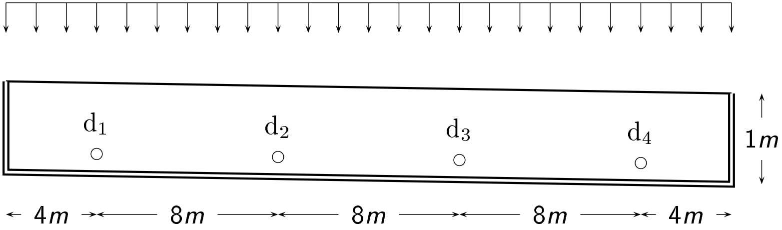


Application en hydrologie

Travail réalisé en collaboration avec B.Augeard (CEMAGREF - Antony)

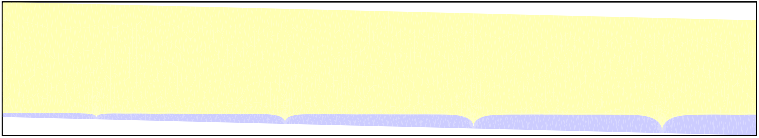
Etude d'une parcelle d'un bassin versant :

- soumise à une pluie d'intensité variable
- contenant des drains

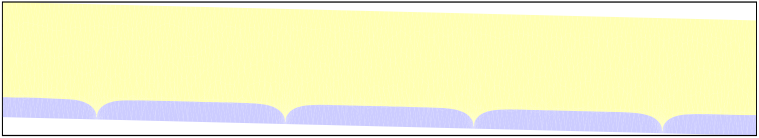


Influence de la condition initiale

Position de la nappe
30min



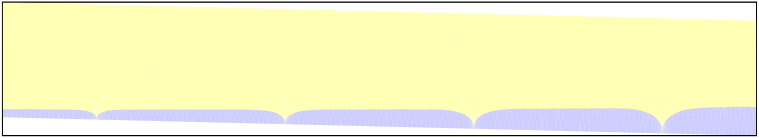
Isovaleurs de ψ horizontales



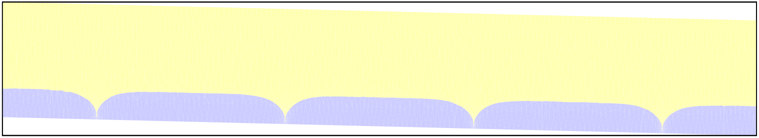
Isovaleurs de ψ parallèles au fond

Influence de la condition initiale

Position de la nappe
1h



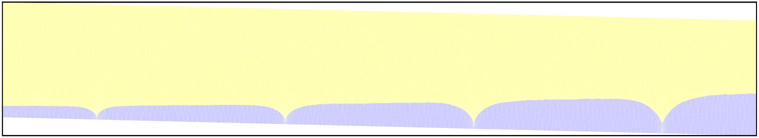
Isovaleurs de ψ horizontales



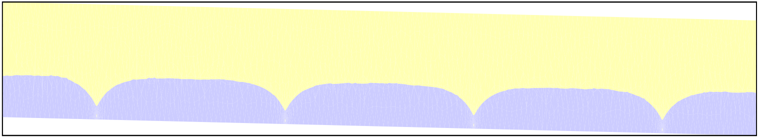
Isovaleurs de ψ parallèles au fond

Influence de la condition initiale

Position de la nappe
1h15min



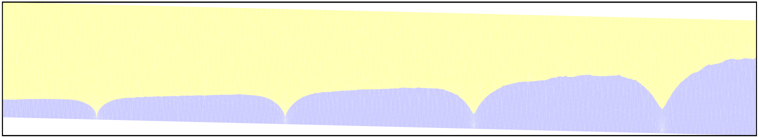
Isovaleurs de ψ horizontales



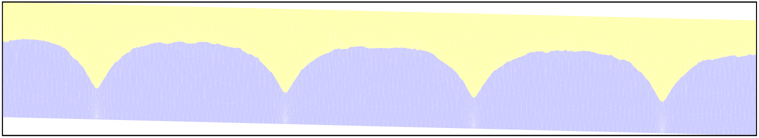
Isovaleurs de ψ parallèles au fond

Influence de la condition initiale

Position de la nappe
1h30min



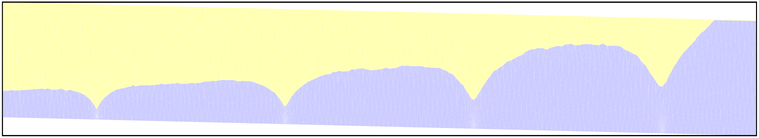
Isovaleurs de ψ horizontales



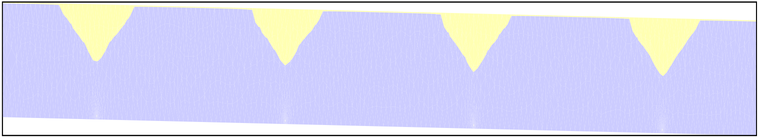
Isovaleurs de ψ parallèles au fond

Influence de la condition initiale

Position de la nappe
1h40min



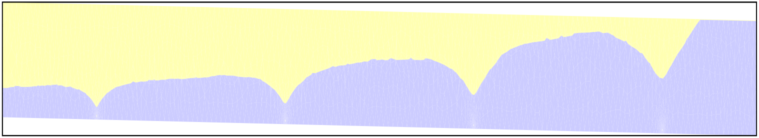
Isovaleurs de ψ horizontales



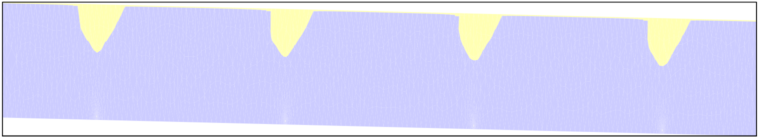
Isovaleurs de ψ parallèles au fond

Influence de la condition initiale

Position de la nappe
1h42min30s



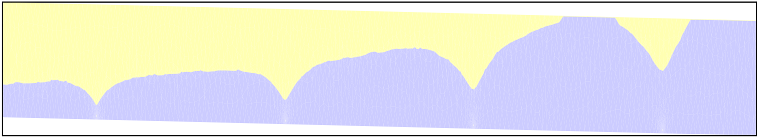
Isovaleurs de ψ horizontales



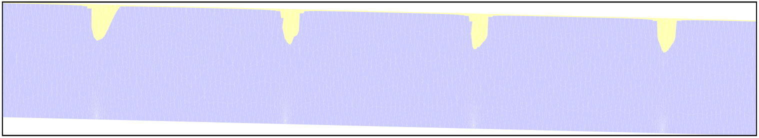
Isovaleurs de ψ parallèles au fond

Influence de la condition initiale

Position de la nappe
1h45min



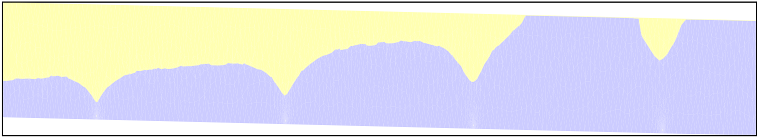
Isovaleurs de ψ horizontales



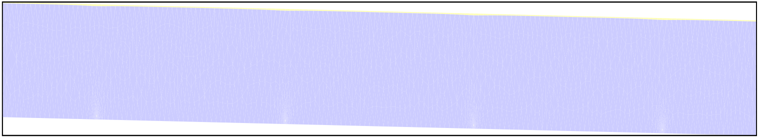
Isovaleurs de ψ parallèles au fond

Influence de la condition initiale

Position de la nappe
1h47min30s

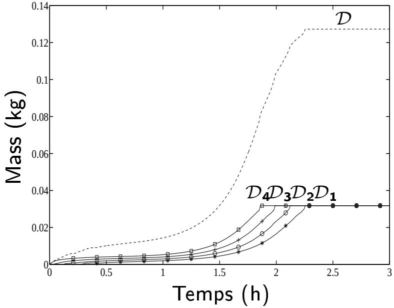


Isovaleurs de ψ horizontales

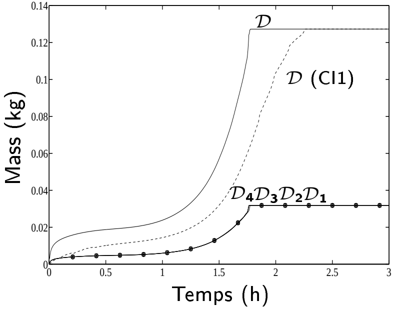


Isovaleurs de ψ parallèles au fond

Bilan de masse autour des drains



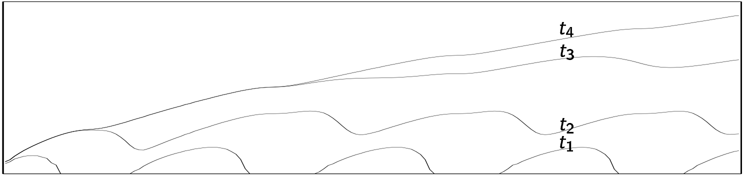
IC 1



IC 2

Hauteur

$$t_1 < t_2 < t_3 < t_4$$



Perspectives

1. Problèmes inverses
   $\rightarrow$ CI, CL

2. Etudes de sensibilité
   $\rightarrow$ propriétés hydrodynamiques, coefficient de frottement

3. Autres cas d'études (sols hétérogènes)

4. Intégrer l'évolution de la topographie z_{f} (équation d'Exner)

$$(1-\phi)\partial_t z_{\mathrm{f}} + \nabla \cdot q_{\mathrm{s}} = 0$$

5. Extension au cas 3D-2D