Schémas volumes finis pour le problème de Stokes à viscosité variable

Stella Krell

Institut National de recherche en Informatique et en Automatique,

Lille - Nord Europe, équipe SIMPAF.

Journées Gdr Calcul,

IHP, le 5 juillet 2011.

Plan

- Le problème

$$(\mathrm{S}) \quad \begin{cases} \mathrm{div}(-\tau(\mathrm{D}\mathbf{u}, p)) = \mathbf{f} & \text{dans } \Omega, \\ \mathrm{div}(\mathbf{u}) = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \mathbf{u} = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \\ \displaystyle\int_\Omega p(x)\mathrm{d}x = 0. & \end{cases}$$

avec $\mathrm{D}\mathbf{u} = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{u} + {}^t\nabla\mathbf{u})$, $\tau(\mathrm{D}\mathbf{u}, p) = 2\eta\mathrm{D}\mathbf{u} - p\mathrm{Id}$

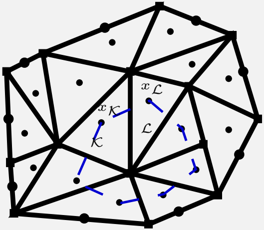
- $\mathbf{f} \in (L^2(\Omega))^2$,
- $\eta \in C^2(\Omega)$ avec

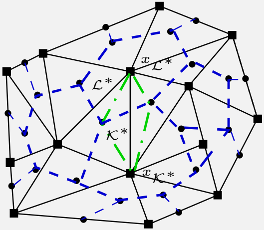
$$0 < \underline{\mathrm{C}}_\eta \leq \eta(x) \leq \overline{\mathrm{C}}_\eta, \quad \forall\, x \in \Omega.$$

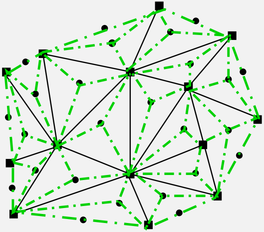
- Objectifs
  - Ecrire un schéma DDFV bien posé pour (S).
  - Démontrer des estimations d'erreur pour ce problème.

PROBLÈME DE STOKES (VISCOSITÉ CONSTANTE) PAR VOLUMES FINIS

- MAILLAGES DÉCALÉS
  - Schémas MAC **(Harlow-Welsh '65), (Nicolaides '92)**
    Premiers schémas limités aux maillages rectangles
  - Schéma cell-centered **(Blanc-Eymard-Herbin '05)**
  - DDFV **(Delcourte-Domelevo-Omnès '07), (K. '09)**
    $\approx$ généralisation de MAC en maillage quelconque
  - Schémas mimétiques **(Beirao da Veiga-Lipnikov-Manzini et al '09)** **(Beirao da Veiga-Lipnikov '10)**
- SCHÉMAS COLOCALISÉS
  - Schéma cell-centered **(Eymard-Herbin-Latché '06 $\rightarrow$'08)**
  - Schémas volumes finis mixtes **(Droniou-Eymard '09)**







maillage $\mathfrak{M}$ maillage $\mathfrak{M}^*$ maillage $\mathfrak{D}$

Mailles primales
$(\mathcal{K}, x_\mathcal{K})_{\mathcal{K}\in\mathfrak{M}}$

Mailles duales
$(\mathcal{K}^*, x_{\mathcal{K}^*})_{\mathcal{K}^*\in\mathfrak{M}^*}$

Mailles diamants
$(\mathcal{D}, x_\mathcal{D})_{\mathcal{D}\in\mathfrak{D}}$

$\rightsquigarrow \mathbf{u}^{\mathfrak{M}} = (\mathbf{u}_\mathcal{K})_{\mathcal{K}\in\mathfrak{M}}$ $\quad \mathbf{u}^{\mathfrak{M}^*} = (\mathbf{u}_{\mathcal{K}^*})_{\mathcal{K}^*\in\mathfrak{M}^*}$

$\rightsquigarrow \mathbf{u}^\mathcal{T} = (\mathbf{u}^{\mathfrak{M}}, \mathbf{u}^{\mathfrak{M}^*})$,

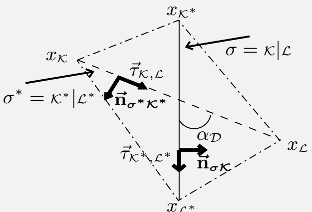
$\rightsquigarrow p^{\mathfrak{D}} = (p^\mathcal{D})_{\mathcal{D}\in\mathfrak{D}}$

$\nabla^{\mathfrak{D}}\mathbf{u}^\mathcal{T}$

(Hermeline '00), (Domelevo-Omnès '05), (Andreianov-Boyer-Hubert '07)

$$\nabla^{\mathfrak{D}} : \left(\mathbb{R}^2\right)^{\mathcal{T}} \longrightarrow (\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))^{\mathfrak{D}}$$

$$\text{où} \left\{ \begin{aligned} \nabla^{\mathcal{D}}\mathbf{u}^{\mathcal{T}}.(x_{\mathcal{L}} - x_{\mathcal{K}}) &= \mathbf{u}_{\mathcal{L}} - \mathbf{u}_{\mathcal{K}}, \\ \nabla^{\mathcal{D}}\mathbf{u}^{\mathcal{T}}.(x_{\mathcal{L}^*} - x_{\mathcal{K}^*}) &= \mathbf{u}_{\mathcal{L}^*} - \mathbf{u}_{\mathcal{K}^*}. \end{aligned} \right.$$



Cellule diamant

$$\nabla^{\mathcal{D}}\mathbf{u}^{\mathcal{T}} = \frac{1}{\sin(\alpha_{\mathcal{D}})} \left(\frac{\mathbf{u}_{\mathcal{L}} - \mathbf{u}_{\mathcal{K}}}{m_{\sigma^*}} \otimes \vec{\mathbf{n}}_{\sigma\mathcal{K}} + \frac{\mathbf{u}_{\mathcal{L}^*} - \mathbf{u}_{\mathcal{K}^*}}{m_{\sigma}} \otimes \vec{\mathbf{n}}_{\sigma^*\mathcal{K}^*} \right).$$

$$\rightsquigarrow \mathrm{D}^{\mathcal{D}}\mathbf{u}^{\mathcal{T}} = \frac{1}{2}\left(\nabla^{\mathcal{D}}\mathbf{u}^{\mathcal{T}} + {}^t(\nabla^{\mathcal{D}}\mathbf{u}^{\mathcal{T}})\right).$$

$$\rightsquigarrow \mathrm{div}^{\mathcal{D}}\mathbf{u}^{\mathcal{T}} = \mathrm{Tr}\nabla^{\mathcal{D}}\mathbf{u}^{\mathcal{T}}.$$

$$\rightsquigarrow \tau_{\mathcal{D}}(\mathrm{D}^{\mathfrak{D}}\mathbf{u}^{\mathcal{T}}, p^{\mathfrak{D}}) = 2\eta_{\mathcal{D}}\mathrm{D}^{\mathcal{D}}\mathbf{u}^{\mathcal{T}} - p^{\mathcal{D}}\mathrm{Id},$$

avec $\eta_{\mathcal{D}} = \eta(x_{\mathcal{D}})$.

Divergence discrète $\mathbf{div}^{\mathcal{T}} : (\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))^{\mathfrak{D}} \longrightarrow (\mathbb{R}^2)^{\mathcal{T}}$
On s'inspire du continu :

$$\int_{\mathcal{K}} \mathrm{div}\xi = \sum_{\sigma\subset\partial\mathcal{K}} \int_{\sigma} \xi.\vec{\boldsymbol{n}}.$$

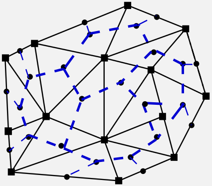
$$\mathcal{K}\in\mathfrak{M},\quad \mathbf{div}^{\mathcal{K}}\xi^{\mathfrak{D}} = \frac{1}{m_{\mathcal{K}}}\sum_{\sigma\subset\partial\mathcal{K}} m_\sigma \xi^{\mathcal{D}}.\vec{\mathbf{n}}_{\sigma\mathcal{K}}.$$

$$\mathcal{K}^*\in\mathfrak{M}^*\cup\partial\mathfrak{M}^*,\quad \mathbf{div}^{\mathcal{K}^*}\xi^{\mathfrak{D}} = \frac{1}{m_{\mathcal{K}^*}}\sum_{\sigma^*\subset\partial\mathcal{K}^*} m_{\sigma^*} \xi^{\mathcal{D}}.\vec{\mathbf{n}}_{\sigma^*\mathcal{K}^*}.$$

Formule de Stokes (Dualité Discrète)

$$\forall\xi^{\mathfrak{D}}\in(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))^{\mathfrak{D}},\ \forall\mathbf{u}^{\mathcal{T}}\in\mathbb{E}_0$$

$$-\int_\Omega \mathbf{div}^{\mathcal{T}}(\xi^{\mathfrak{D}})\cdot\mathbf{u}^{\mathcal{T}} = \int_\Omega \xi^{\mathfrak{D}} : \nabla^{\mathfrak{D}}\mathbf{u}^{\mathcal{T}}$$



avec $\mathbb{E}_0 = \{\mathbf{u}^{\mathcal{T}}\in\mathbb{R}^{\mathcal{T}}, \forall\ \mathcal{K}\in\partial\mathfrak{M},\ \mathbf{u}_{\mathcal{K}}=0,\quad \forall\ \mathcal{K}^*\in\partial\mathfrak{M}^*,\ \mathbf{u}_{\mathcal{K}^*}=0\}.$

$$
\left\{
\begin{array}{l}
\text{Trouver } \mathbf{u}^{\mathcal{T}} \in \mathbb{E}_0 \text{ et } p^{\mathfrak{D}} \in \mathbb{R}^{\mathfrak{D}} \text{ tels que,} \\
\qquad\qquad \mathbf{div}^{\mathfrak{M}}(-\tau^{\mathfrak{D}}(\mathrm{D}^{\mathfrak{D}}\mathbf{u}^{\mathcal{T}}, p^{\mathfrak{D}})) = \mathbf{f}^{\mathfrak{M}}, \\
\qquad\qquad \mathbf{div}^{\mathfrak{M}^*}(-\tau^{\mathfrak{D}}(\mathrm{D}^{\mathfrak{D}}\mathbf{u}^{\mathcal{T}}, p^{\mathfrak{D}})) = \mathbf{f}^{\mathfrak{M}^*}, \\
\qquad\qquad \mathrm{div}^{\mathfrak{D}}\mathbf{u}^{\mathcal{T}} = 0, \ \sum_{\mathcal{D}\in\mathfrak{D}} m_{\mathcal{D}} p^{\mathcal{D}} = 0,
\end{array}
\right.
$$

- **On ne sait pas si le problème est bien posé sur un maillage général**.
- En revanche, on sait qu'il est bien posé sur des maillages constitués de triangles conformes à angles aigus ou de rectangles non conformes.

(Delcourte, Domelevo, Omnès '07)

Que faire ?

- **Stabiliser l'équation de l'équation de bilan de masse**

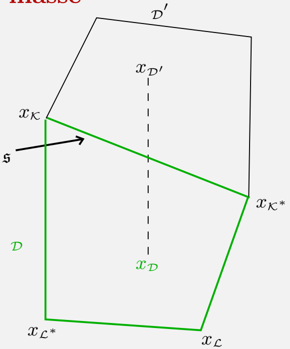
Terme de stabilisation à la Brezzi-Pitkäranta :

$$\Delta^{\mathcal{D}} p^{\mathfrak{D}} = \frac{1}{m_{\mathcal{D}}} \sum_{\mathfrak{s}=\mathcal{D}|\mathcal{D}' \in \partial\mathcal{D}} \frac{h_{\mathcal{D}}^2 + h_{\mathcal{D}'}^2}{h_{\mathcal{D}}^2} (p^{\mathcal{D}'} - p^{\mathcal{D}}),$$

$h_{\mathcal{D}}$ est le diamètre du diamant $\mathcal{D}$.

$$\int_{\mathcal{D}} \Delta p = \sum_{\mathfrak{s}=\mathcal{D}|\mathcal{D}' \in \partial\mathcal{D}} \int_{\mathfrak{s}} \nabla p \cdot \vec{\mathbf{n}}_{\mathfrak{s}\mathcal{D}}$$

$$\sim \sum_{\mathfrak{s}=\mathcal{D}|\mathcal{D}' \in \partial\mathcal{D}} m_{\mathfrak{s}} \frac{p(x_{\mathcal{D}'}) - p(x_{\mathcal{D}})}{d_{\mathcal{D}',\mathcal{D}}} \sim \sum_{\mathfrak{s}=\mathcal{D}|\mathcal{D}' \in \partial\mathcal{D}} (p(x_{\mathcal{D}'}) - p(x_{\mathcal{D}})).$$



(Eymard-Herbin-Latché '06)

- **Alternative possible (duale)** : approcher la pression aux centres et sommets et la vitesse sur les diamants, puis se ramener à des formulations en tourbillon, utilisant $\Delta = \nabla \mathrm{div} - \mathbf{curl}\ \mathrm{curl}$.

(Delcourte, Domelevo, Omnès '07)

Inégalité de Korn discrète

Pour tout $\mathbf{u}^{\mathcal{T}} \in \mathbb{E}_0$

$$\mathbf{div}^{\mathcal{T}} \left({}^t\nabla^{\mathfrak{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}} \right) = \mathbf{div}^{\mathcal{T}} \left(\mathrm{div}^{\mathfrak{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}} \mathrm{Id} \right).$$

Théorème (Inégalité de Korn discrète)

Pour tout $\mathbf{u}^{\mathcal{T}} \in \mathbb{E}_0$,

$$\|\mathrm{D}^{\mathfrak{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}\|_2 \leq \|\nabla^{\mathfrak{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}\|_2 \leq \sqrt{2} \|\mathrm{D}^{\mathfrak{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}\|_2.$$

- On veut montrer que $\|\nabla^{\mathfrak{D}}\mathbf{u}^{\mathcal{T}}\|_2 \le \sqrt{2}\|D^{\mathfrak{D}}\mathbf{u}^{\mathcal{T}}\|_2$:

$$2\|D^{\mathfrak{D}}\mathbf{u}^{\mathcal{T}}\|_2^2 = \|\nabla^{\mathfrak{D}}\mathbf{u}^{\mathcal{T}}\|_2^2 + \int_\Omega \left({}^t\left(\nabla^{\mathfrak{D}}\mathbf{u}^{\mathcal{T}}\right) : \nabla^{\mathfrak{D}}\mathbf{u}^{\mathcal{T}} \right).$$

On utilise la formule de Stokes discrète

$$\begin{aligned}\int_\Omega \left({}^t\left(\nabla^{\mathfrak{D}}\mathbf{u}^{\mathcal{T}}\right) : \nabla^{\mathfrak{D}}\mathbf{u}^{\mathcal{T}} \right) &= -\int_\Omega \mathbf{div}^{\mathcal{T}} \left({}^t\left(\nabla^{\mathfrak{D}}\mathbf{u}^{\mathcal{T}}\right)\right) \cdot \mathbf{u}^{\mathcal{T}} \\ &= -\int_\Omega \mathbf{div}^{\mathcal{T}}(\mathrm{div}^{\mathfrak{D}}\mathbf{u}^{\mathcal{T}}\mathrm{Id}) \cdot \mathbf{u}^{\mathcal{T}}\end{aligned}$$

A nouveau grâce au Stokes discret et $\mathrm{div}^{\mathfrak{D}}\mathbf{u}^{\mathcal{T}} = (\mathrm{Id} : \nabla^{\mathfrak{D}}\mathbf{u}^{\mathcal{T}})$:

$$\int_\Omega \left({}^t\left(\nabla^{\mathfrak{D}}\mathbf{u}^{\mathcal{T}}\right) : \nabla^{\mathfrak{D}}\mathbf{u}^{\mathcal{T}} \right) = \int_\Omega (\mathrm{div}^{\mathfrak{D}}\mathbf{u}^{\mathcal{T}}\mathrm{Id} : \nabla^{\mathfrak{D}}\mathbf{u}^{\mathcal{T}}) = \|\mathrm{div}^{\mathfrak{D}}\mathbf{u}^{\mathcal{T}}\|_2^2 \ge 0.$$

$$
\text{(S-DDFV)} \quad \begin{cases}
\text{Trouver } \mathbf{u}^{\mathcal{T}} \in \mathbb{E}_0 \text{ et } p^{\mathfrak{D}} \in \mathbb{R}^{\mathfrak{D}} \text{ tels que,} \\
\qquad \mathbf{div}^{\mathfrak{M}}(-\tau^{\mathfrak{D}}(\mathrm{D}^{\mathfrak{D}}\mathbf{u}^{\mathcal{T}}, p^{\mathfrak{D}})) = \mathbf{f}^{\mathfrak{M}}, \\
\qquad \mathbf{div}^{\mathfrak{M}^*}(-\tau^{\mathfrak{D}}(\mathrm{D}^{\mathfrak{D}}\mathbf{u}^{\mathcal{T}}, p^{\mathfrak{D}})) = \mathbf{f}^{\mathfrak{M}^*}, \\
\qquad \mathrm{div}^{\mathfrak{D}}\mathbf{u}^{\mathcal{T}} - \lambda h_{\mathfrak{D}}^2 \Delta^{\mathfrak{D}} p^{\mathfrak{D}} = 0, \\
\qquad \displaystyle\sum_{\mathcal{D}\in\mathfrak{D}} m_{\mathcal{D}} p^{\mathcal{D}} = 0,
\end{cases}
$$

on rappelle $\tau_{\mathcal{D}}(\mathrm{D}^{\mathfrak{D}}\mathbf{u}^{\mathcal{T}}, p^{\mathfrak{D}}) = 2\eta_{\mathcal{D}}\mathrm{D}^{\mathcal{D}}\mathbf{u}^{\mathcal{T}} - p^{\mathcal{D}}\mathrm{Id}$.

(K. '09)

THÉORÈME (EXISTENCE ET UNICITÉ)

Soit $\mathcal{T}$ un maillage DDFV.
Pour toute valeur de $\lambda > 0$, le schéma (S-DDFV) *admet une* **unique** *solution.*

Soient $\mathbf{u}^{\mathcal{T}} \in \mathbb{E}_0$ et $p^{\mathfrak{D}} \in \mathbb{R}^{\mathfrak{D}}$ tels que :

$$\begin{cases} \text{Trouver } \mathbf{u}^{\mathcal{T}} \in \mathbb{E}_0 \text{ et } p^{\mathfrak{D}} \in \mathbb{R}^{\mathfrak{D}} \text{ tels que,} \\ \qquad \mathbf{div}^{\mathfrak{M}}(-\tau^{\mathfrak{D}}(\mathrm{D}^{\mathfrak{D}}\mathbf{u}^{\mathcal{T}}, p^{\mathfrak{D}})) = 0, \\ \qquad \mathbf{div}^{\mathfrak{M}^*}(-\tau^{\mathfrak{D}}(\mathrm{D}^{\mathfrak{D}}\mathbf{u}^{\mathcal{T}}, p^{\mathfrak{D}})) = 0, \\ \qquad \mathrm{div}^{\mathfrak{D}}\mathbf{u}^{\mathcal{T}} - \lambda h_{\mathfrak{D}}^2 \Delta^{\mathfrak{D}} p^{\mathfrak{D}} = 0, \ \displaystyle\sum_{\mathcal{D}\in\mathfrak{D}} m_{\mathcal{D}} p^{\mathcal{D}} = 0. \end{cases}$$

On utilise la formule de Stokes discrète

$$\int_\Omega \mathbf{div}^{\mathcal{T}}(-\tau^{\mathfrak{D}}(\mathrm{D}^{\mathfrak{D}}\mathbf{u}^{\mathcal{T}}, p^{\mathfrak{D}})) \cdot \mathbf{u}^{\mathcal{T}} = \int_\Omega \left(2\eta^{\mathfrak{D}}\mathrm{D}^{\mathfrak{D}}\mathbf{u}^{\mathcal{T}} : \mathrm{D}^{\mathfrak{D}}\mathbf{u}^{\mathcal{T}}\right) - \int_\Omega \mathrm{div}^{\mathfrak{D}}\mathbf{u}^{\mathcal{T}} p^{\mathfrak{D}}.$$

L'équation de conservation de la masse donne

$$-\int_\Omega \mathrm{div}^{\mathfrak{D}}\mathbf{u}^{\mathcal{T}} p^{\mathfrak{D}} = -\int_\Omega \lambda h_{\mathfrak{D}}^2 \Delta^{\mathfrak{D}} p^{\mathfrak{D}} p^{\mathfrak{D}} = \lambda |p^{\mathfrak{D}}|_h^2,$$

où $|p^{\mathfrak{D}}|_h^2 = \displaystyle\sum_{\mathfrak{s}\in\mathfrak{S}} (h_{\mathcal{D}}^2 + h_{\mathcal{D}'}^2)(p^{\mathcal{D}'} - p^{\mathcal{D}})^2 \sim \mathbf{h^2}\|\mathbf{p}\|_{\mathbf{H^1}}^{\mathbf{2}}$.

On utilise l'inégalité de Korn discrète :

$$0 = \int_\Omega \mathbf{div}^{\mathcal{T}}(-\tau^{\mathfrak{D}}(\mathrm{D}^{\mathfrak{D}}\mathbf{u}^{\mathcal{T}}, p^{\mathfrak{D}})) \cdot \mathbf{u}^{\mathcal{T}} \geq \underline{\mathrm{C}}_\eta \| \nabla^{\mathfrak{D}}\mathbf{u}^{\mathcal{T}} \|_2^2 + \lambda |p^{\mathfrak{D}}|_h^2.$$

On trouve donc

$$\| \nabla^{\mathfrak{D}}\mathbf{u}^{\mathcal{T}} \|_2^2 = 0 \quad \text{et} \quad |p^{\mathfrak{D}}|_h^2 = 0.$$

D'où $\mathbf{u}^{\mathcal{T}} = \mathbf{0}$ et $p^{\mathfrak{D}} = c$. Par la condition de normalisation $\displaystyle\sum_{\mathcal{D}\in\mathfrak{D}} m_{\mathcal{D}} p^{\mathcal{D}} = 0$, on obtient $p^{\mathfrak{D}} = 0$.

THÉORÈME (ESTIMATIONS D'ERREUR)

Soit $\mathcal{T}$ un maillage DDFV général.
On note $(\mathbf{u}^{\mathcal{T}}, p^{\mathfrak{D}}) \in \left(\mathbb{R}^2\right)^{\mathcal{T}} \times \mathbb{R}^{\mathfrak{D}}$ la solution du schéma (S-DDFV).
On suppose

- *η est C^2 sur $\overline{\Omega}$*
- *La solution exacte du problème vérifie $(\mathbf{u}, p) \in (H^2(\Omega))^2 \times H^1(\Omega)$,*

Alors il existe $C > 0$:

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}^{\mathcal{T}}\|_2 + \|\nabla \mathbf{u} - \nabla^{\mathfrak{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}\|_2 \quad \leq \quad C\mathrm{size}(\mathcal{T}),$$

et

$$\|p - p^{\mathfrak{D}}\|_2 \quad \leq \quad C\mathrm{size}(\mathcal{T}).$$

Taux de convergence "optimal".

- La forme bilinéaire associée au problème :

$$B(\mathbf{u}^{\mathcal{T}}, p^{\mathfrak{D}}; \widetilde{\mathbf{u}}^{\mathcal{T}}, \widetilde{p}^{\mathfrak{D}}) = \int_{\Omega} \mathbf{div}^{\mathcal{T}}(-\tau^{\mathfrak{D}}(\mathrm{D}^{\mathfrak{D}}\mathbf{u}^{\mathcal{T}}, p^{\mathfrak{D}})) \cdot \widetilde{\mathbf{u}}^{\mathcal{T}} + \int_{\Omega} (\mathrm{div}^{\mathfrak{D}}\mathbf{u}^{\mathcal{T}} - \lambda h_{\mathfrak{D}}^2 \Delta^{\mathfrak{D}} p^{\mathfrak{D}}) \widetilde{p}^{\mathfrak{D}}.$$

On sait qu'**on n'a pas** la coercivité au sens traditionnel

$$|\!|\!| \nabla^{\mathfrak{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}} |\!|\!|_2^2 + \| p^{\mathfrak{D}} \|_2^2 \leq C_2 B(\mathbf{u}^{\mathcal{T}}, p^{\mathfrak{D}}; \mathbf{u}^{\mathcal{T}}, p^{\mathfrak{D}}).$$

On a seulement une estimation

$$|\!|\!| \nabla^{\mathfrak{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}} |\!|\!|_2^2 + \lambda |p^{\mathfrak{D}}|_h^2 \leq C_2 B(\mathbf{u}^{\mathcal{T}}, p^{\mathfrak{D}}; \mathbf{u}^{\mathcal{T}}, p^{\mathfrak{D}}),$$

avec $|p^{\mathfrak{D}}|_h^2 = \sum_{\mathfrak{s} \in \mathfrak{S}} (h_{\mathcal{D}}^2 + h_{\mathcal{D}'}^2)(p^{\mathcal{D}'} - p^{\mathcal{D}})^2.$

- La forme bilinéaire associée au problème :

$$B(\mathbf{u}^{\mathcal{T}}, p^{\mathfrak{D}}; \widetilde{\mathbf{u}}^{\mathcal{T}}, \widetilde{p}^{\mathfrak{D}}) = \int_\Omega \mathbf{div}^{\mathcal{T}}(-\tau^{\mathfrak{D}}(\mathrm{D}^{\mathfrak{D}}\mathbf{u}^{\mathcal{T}}, p^{\mathfrak{D}})) \cdot \widetilde{\mathbf{u}}^{\mathcal{T}} + \int_\Omega (\mathrm{div}^{\mathfrak{D}}\mathbf{u}^{\mathcal{T}} - \lambda h_{\mathfrak{D}}^2 \Delta^{\mathfrak{D}} p^{\mathfrak{D}})\widetilde{p}^{\mathfrak{D}}.$$

On sait qu'**on n'a pas** la coercivité au sens traditionnel

$$|||\nabla^{\mathfrak{D}}\mathbf{u}^{\mathcal{T}}|||_2^2 + \|p^{\mathfrak{D}}\|_2^2 \leq C_2 B(\mathbf{u}^{\mathcal{T}}, p^{\mathfrak{D}}; \mathbf{u}^{\mathcal{T}}, p^{\mathfrak{D}}).$$

On a seulement une estimation

$$|||\nabla^{\mathfrak{D}}\mathbf{u}^{\mathcal{T}}|||_2^2 + \lambda |p^{\mathfrak{D}}|_h^2 \leq C_2 B(\mathbf{u}^{\mathcal{T}}, p^{\mathfrak{D}}; \mathbf{u}^{\mathcal{T}}, p^{\mathfrak{D}}),$$

avec $|p^{\mathfrak{D}}|_h^2 = \sum_{\mathfrak{s}\in\mathfrak{S}} (h_{\mathcal{D}}^2 + h_{\mathcal{D}'}^2)(p^{\mathcal{D}'} - p^{\mathcal{D}})^2$.

- Idée : Trouver $\widetilde{\mathbf{u}}^{\mathcal{T}}, \widetilde{p}^{\mathfrak{D}}$ ($\approx \mathbf{u}^{\mathcal{T}}, p^{\mathfrak{D}}$) pour avoir l'inégalité inf-sup

$$|||\nabla^{\mathfrak{D}}\mathbf{u}^{\mathcal{T}}|||_2 + \|p^{\mathfrak{D}}\|_2 \leq C_2 \frac{B(\mathbf{u}^{\mathcal{T}}, p^{\mathfrak{D}}; \widetilde{\mathbf{u}}^{\mathcal{T}}, \widetilde{p}^{\mathfrak{D}})}{|||\nabla^{\mathfrak{D}}\widetilde{\mathbf{u}}^{\mathcal{T}}|||_2 + \|\widetilde{p}^{\mathfrak{D}}\|_2}.$$

(Eymard-Herbin-Latché '06)

- La forme bilinéaire associée au problème :

$$B(\mathbf{u}^{\mathcal{T}}, p^{\mathfrak{D}}; \widetilde{\mathbf{u}}^{\mathcal{T}}, \widetilde{p}^{\mathfrak{D}}) = \int_\Omega \mathbf{div}^{\mathcal{T}}(-\tau^{\mathfrak{D}}(\mathrm{D}^{\mathfrak{D}}\mathbf{u}^{\mathcal{T}}, p^{\mathfrak{D}})) \cdot \widetilde{\mathbf{u}}^{\mathcal{T}} + \int_\Omega (\mathrm{div}^{\mathfrak{D}}\mathbf{u}^{\mathcal{T}} - \lambda h_{\mathfrak{D}}^2 \Delta^{\mathfrak{D}} p^{\mathfrak{D}})\widetilde{p}^{\mathfrak{D}}.$$

Proposition (Stabilité de (S-DDFV))

Pour tout $(\mathbf{u}^{\mathcal{T}}, p^{\mathfrak{D}}) \in \mathbb{E}_0 \times \mathbb{R}^{\mathfrak{D}}$ *avec* $\sum_{\mathcal{D}\in\mathfrak{D}} m_{\mathcal{D}} p^{\mathcal{D}} = 0$, *il existe* $(\widetilde{\mathbf{u}}^{\mathcal{T}}, \widetilde{p}^{\mathfrak{D}}) \in \mathbb{E}_0 \times \mathbb{R}^{\mathfrak{D}}$ *et* $C_1, C_2 > 0$ *:*

$$\|\nabla^{\mathfrak{D}}\widetilde{\mathbf{u}}^{\mathcal{T}}\|_2 + \|\widetilde{p}^{\mathfrak{D}}\|_2 \leq C_1 \left(\|\nabla^{\mathfrak{D}}\mathbf{u}^{\mathcal{T}}\|_2 + \|p^{\mathfrak{D}}\|_2\right),$$

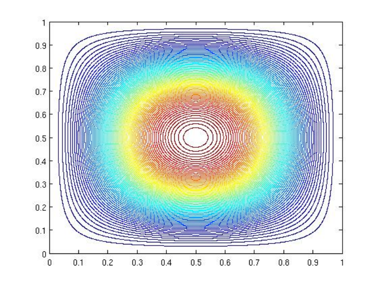
et

$$\|\nabla^{\mathfrak{D}}\mathbf{u}^{\mathcal{T}}\|_2^2 + \|p^{\mathfrak{D}}\|_2^2 \leq C_2 B(\mathbf{u}^{\mathcal{T}}, p^{\mathfrak{D}}; \widetilde{\mathbf{u}}^{\mathcal{T}}, \widetilde{p}^{\mathfrak{D}}).$$

$$\mathbf{u}(x,y) = \begin{pmatrix} 1000x^2(1-x)^2 2y(1-y)(1-2y) \\ -1000y^2(1-y)^2 2x(1-x)(1-2x) \end{pmatrix},$$

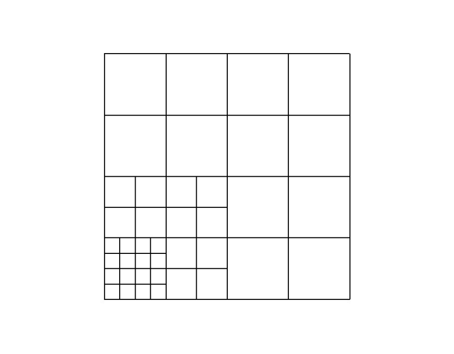
$$p(x,y) = x^2 + y^2 - \frac{2}{3},$$

$$\eta(x,y) = 2x + y + 1.$$

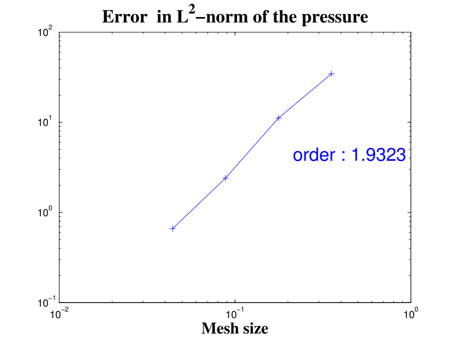


Lignes de courant

Maillage

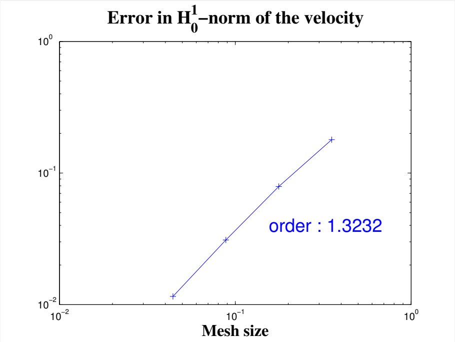


$\|p - p^{\mathfrak{D}}\|_2/\|p\|_2$



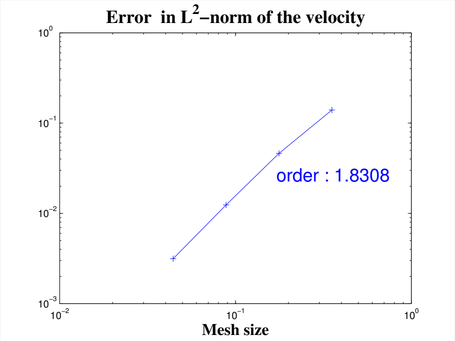
Ordre =1.9

$$\|\mathbf{u}-\mathbf{u}^{\mathcal{T}}\|_{H_0^1}/\|\mathbf{u}\|_{H_0^1}$$



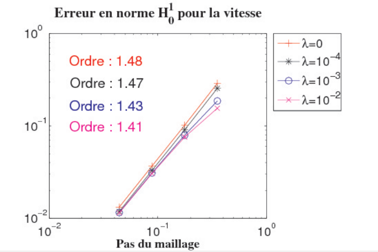
Ordre =1.3

$$\|\mathbf{u}-\mathbf{u}^{\mathcal{T}}\|_2/\|\mathbf{u}\|_2$$

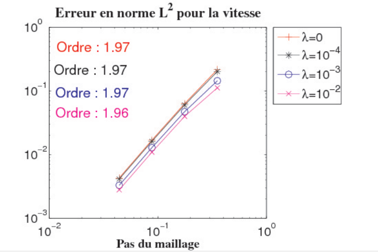


Ordre =1.8

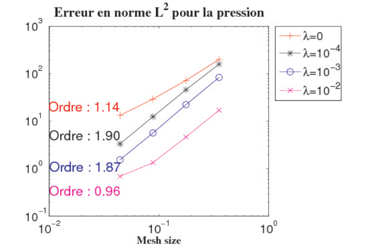
$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}^{\mathcal{T}}\|_{H_0^1} / \|\mathbf{u}\|_{H_0^1}$$

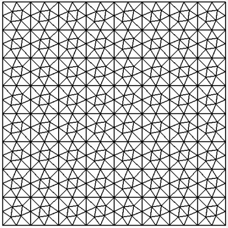


$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}^{\mathcal{T}}\|_2 / \|\mathbf{u}\|_2$$



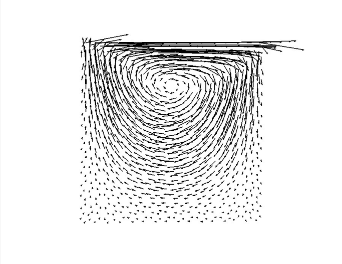
$$\|p - p^{\mathfrak{D}}\|_2 / \|p\|_2$$

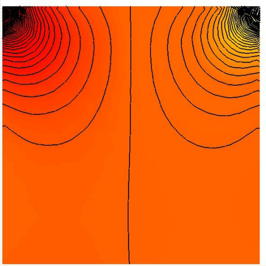


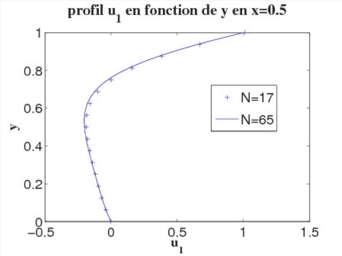


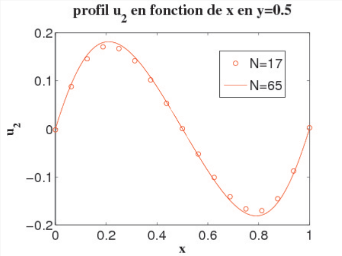
$\rightsquigarrow$ On choisit les points : $(x_{\mathcal{K}})_{\mathcal{K}\in\mathfrak{M}}$ aux centres de gravité des triangles.

$$\begin{cases} \operatorname{div}(-10^{-4}\nabla\mathbf{u} + p\mathrm{Id}) = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \operatorname{div}(\mathbf{u}) = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \mathbf{u} = \begin{cases} (1,0) \text{ si } (x,y)\in A := \{(z,1), 0\leq z\leq 1\} \\ (0,0) \text{ si } (x,y)\in\partial\Omega\setminus A \end{cases} \end{cases}$$





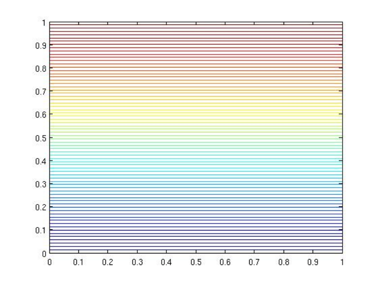

profil u_1 en fonction de y en x=0.5
y
u_1
N=17
N=65
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
−0.5
0
0.5
1
1.5


profil u_2 en fonction de x en y=0.5
u_2
x
N=17
N=65
0.2
0.1
0
−0.1
−0.2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1

$$\mathbf{u}(x,y) = \begin{pmatrix} \begin{cases} y^2 - 0.5y & \text{pour } y > 0.5 \\ 10^4(y^2 - 0.5y) & \text{sinon.} \end{cases} \\ 0 \end{pmatrix},$$

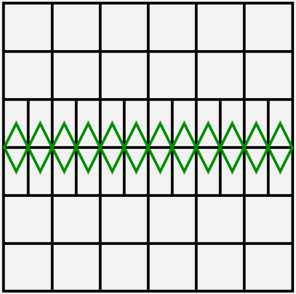
$$p(x,y) = 2x - 1,$$

$$\eta(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{pour } y > 0.5 \\ 10^{-4} & \text{sinon.} \end{cases}$$



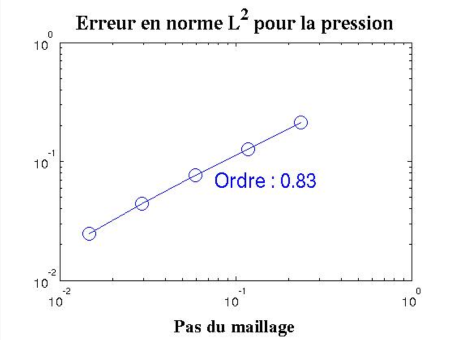
Lignes de courant

Maillage



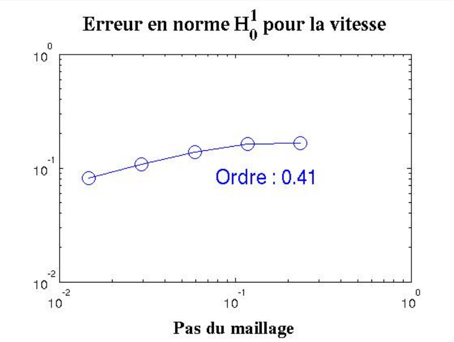
Maillage respecte la discontinuité de η
(i.e. η constante sur $\mathcal{K}$)
mais η est discontinue sur $\mathcal{D}$
$\rightsquigarrow$ Problème pour définir $\eta_{\mathcal{D}}$.

$\|p - p^{\mathfrak{D}}\|_2 / \|p\|_2$



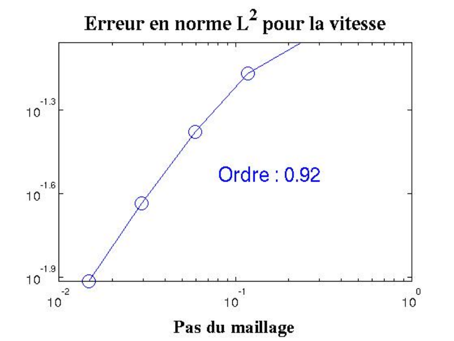
Ordre =0.83

$\|\mathbf{u}-\mathbf{u}^{\mathcal{T}}\|_{H_0^1}/\|\mathbf{u}\|_{H_0^1}$



Ordre $=0.41$

$\|\mathbf{u}-\mathbf{u}^{\mathcal{T}}\|_2/\|\mathbf{u}\|_2$

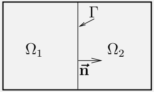


Ordre $=0.92$

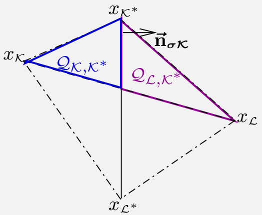
Le problème avec viscosité discontinue

$$(S_\Gamma)\quad \begin{cases} \operatorname{div}\left(-\tau(\mathrm{D}\mathbf{u},p)\right) = \mathbf{f}, & \text{dans } \Omega_i, \\ \operatorname{div}(\mathbf{u}) = 0, & \text{dans } \Omega_i, \\ \mathbf{u} = 0, & \text{sur } \partial\Omega, \qquad \displaystyle\int_\Omega p(x)\mathrm{d}x = 0, \\ [\mathbf{u}] = [\tau(\mathrm{D}\mathbf{u},p)]\,\vec{\mathbf{n}} = 0, & \text{sur } \Gamma, \end{cases}$$

avec $\mathrm{D}\mathbf{u} = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{u} + {}^t\nabla\mathbf{u})$ et $\tau(\mathrm{D}\mathbf{u},p) = 2\eta\mathrm{D}\mathbf{u} - p\mathrm{Id}$.



- $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$ et $\overline{\Omega} = \overline{\Omega_1} \cup \overline{\Omega_2}$,
- $\Gamma = \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2$,
- $\vec{\mathbf{n}}$ est une normale à Γ et $[a] = (a_{|\Omega_1} - a_{|\Omega_2})_{|\Gamma}$ est le saut sur Γ.
- **Viscosité η constante par morceaux** : $\eta(x) = \eta_i$ pour $x \in \Omega_i$.
- $\begin{array}{ll} \mathbf{u} \in (H^1(\Omega))^2, & \mathbf{u}_{|\Omega_i} \in (H^2(\Omega_i))^2, \text{ pour } i = 1,2, \\ p \in L^2(\Omega), & p_{|\Omega_i} \in H^1(\Omega_i), \text{ pour } i = 1,2. \end{array}$, si Ω et $\mathbf{f}$ sont réguliers.



Tenseur des contraintes $\tau(\mathrm{D}\mathbf{u}, p) = 2\eta\mathrm{D}\mathbf{u} - p\mathrm{Id}$.

$\rightsquigarrow$ **Conservativité locale** à travers $[x_{\mathcal{K}^*}, x_{\mathcal{D}}]$:

$$\int_{[x_{\mathcal{K}^*}, x_{\mathcal{D}}]} \tau_{|\overline{\mathcal{Q}}_{\mathcal{K},\mathcal{K}^*}}(\mathbf{u}, p)\vec{\mathbf{n}}_{\sigma\mathcal{K}}\mathrm{d}s$$

$$= \int_{[x_{\mathcal{K}^*}, x_{\mathcal{D}}]} \tau_{|\overline{\mathcal{Q}}_{\mathcal{L},\mathcal{K}^*}}(\mathbf{u}, p)\vec{\mathbf{n}}_{\sigma\mathcal{K}}\mathrm{d}s.$$

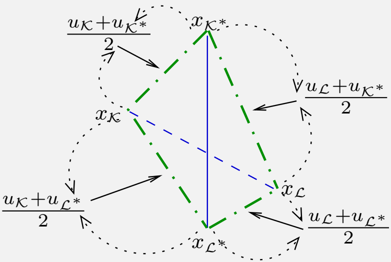
Il faut définir sur chaque quart de diamant

- une nouvelle inconnue en pression $p^{\mathcal{Q}}$
- un nouveau tenseur des taux de déformation $\mathrm{D}^{\mathcal{N}}_{\mathcal{Q}}\mathbf{u}^{\boldsymbol{\tau}}$

Il faut assurer la conservativité des tenseurs des contraintes discrets $\tau_{\mathcal{Q}}$:

$$\Longrightarrow \tau_{\mathcal{Q}} = 2\eta_{\mathcal{Q}}\mathrm{D}^{\mathcal{N}}_{\mathcal{Q}}\mathbf{u}^{\boldsymbol{\tau}} - \mathbf{p}^{\mathcal{Q}}\mathrm{Id},$$

avec $\eta_{\mathcal{Q}} = \eta(x_{\mathcal{Q}})$.



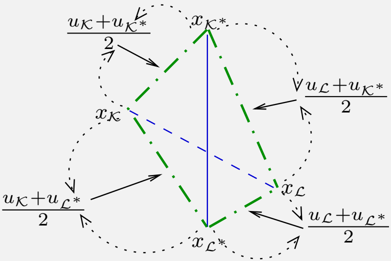
Cas scalaire

Remarque :

$$\nabla^{\mathcal{D}} u^{\mathcal{T}} = \nabla \Pi_{\mathcal{D}} u^{\mathcal{T}},$$

où $\Pi_{\mathcal{D}} u^{\mathcal{T}}$ est l'unique fonction affine

$$\Pi_{\mathcal{D}} u^{\mathcal{T}} \left(\frac{x_{\mathcal{K}}+x_{\mathcal{K}^*}}{2} \right) = \frac{u_{\mathcal{K}}+u_{\mathcal{K}^*}}{2}, \cdots$$



Cas scalaire

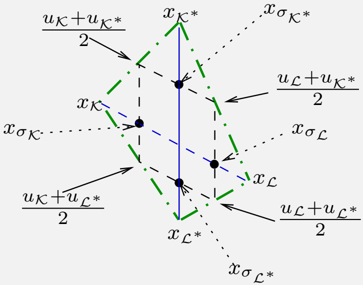
Remarque :

$$\nabla^{\mathcal{D}} u^{\mathcal{T}} = \nabla \Pi_{\mathcal{D}} u^{\mathcal{T}},$$

où $\Pi_{\mathcal{D}} u^{\mathcal{T}}$ est l'unique fonction affine

$$\Pi_{\mathcal{D}} u^{\mathcal{T}} \left(\frac{x_{\mathcal{K}}+x_{\mathcal{K}^*}}{2} \right) = \frac{u_{\mathcal{K}}+u_{\mathcal{K}^*}}{2}, \cdots$$

On construit un nouveau **gradient constant sur chaque quart diamant** :

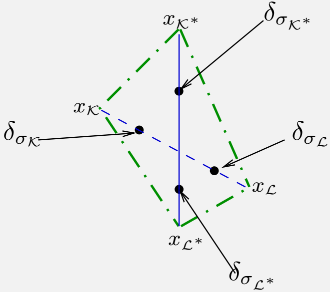


$$\nabla_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{N}} u^{\mathcal{T}} = \nabla \widetilde{\Pi}_{\mathcal{D}} u^{\mathcal{T}}{}_{|\mathcal{Q}}, \qquad \forall \mathcal{Q} \subset \mathcal{D},$$

où $\widetilde{\Pi}_{\mathcal{D}} u^{\mathcal{T}}$ une fonction affine sur chaque $\mathcal{Q}$

- coïncide avec $\Pi_{\mathcal{D}} u^{\mathcal{T}}$ au milieu des arêtes du diamant $\mathcal{D}$
- continue en $x_{\sigma_{\mathcal{K}}}, x_{\sigma_{\mathcal{L}}}, x_{\sigma_{\mathcal{K}^*}}, x_{\sigma_{\mathcal{L}^*}}$.

$\nabla_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{N}} u^{\mathcal{T}}$ déterminé par $u^{\mathcal{T}}$ et les valeurs $\widetilde{\Pi}_{\mathcal{D}} u^{\mathcal{T}}(x_\sigma)$.



Cas scalaire :

$$\delta_\sigma = \widetilde{\Pi}_{\mathcal{D}} u^{\mathcal{T}}(x_\sigma) - \Pi_{\mathcal{D}} u^{\mathcal{T}}(x_\sigma),$$

$$\rightsquigarrow \delta^{\mathcal{D}} = (\delta_{\sigma_{\mathcal{K}}}, \delta_{\sigma_{\mathcal{L}}}, \delta_{\sigma_{\mathcal{K}^*}}, \delta_{\sigma_{\mathcal{L}^*}})^t$$

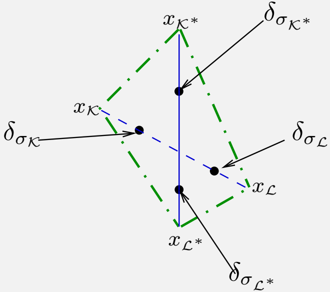
$\nabla \widetilde{\Pi}_{\mathcal{D}} u^{\mathcal{T}} - \nabla \Pi_{\mathcal{D}} u^{\mathcal{T}}$ dépend linéairement de $\delta^{\mathcal{D}}$

$\rightsquigarrow$ Existence de matrices $B_{\mathcal{Q}}$

$$\rightsquigarrow \nabla_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{N}} u^{\mathcal{T}} = \nabla^{\mathcal{D}} u^{\mathcal{T}} + B_{\mathcal{Q}} \delta^{\mathcal{D}}, \ \forall \mathcal{Q} \subset \mathcal{D}.$$

(Boyer, Hubert '08)

$\nabla_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{N}} u^{\mathcal{T}}$ déterminé par $u^{\mathcal{T}}$ et les valeurs $\widetilde{\Pi}_{\mathcal{D}} u^{\mathcal{T}}(x_\sigma)$.



Cas scalaire :

$$\delta_\sigma = \widetilde{\Pi}_{\mathcal{D}} u^{\mathcal{T}}(x_\sigma) - \Pi_{\mathcal{D}} u^{\mathcal{T}}(x_\sigma),$$

$$\rightsquigarrow \delta^{\mathcal{D}} = (\delta_{\sigma_{\mathcal{K}}}, \delta_{\sigma_{\mathcal{L}}}, \delta_{\sigma_{\mathcal{K}^*}}, \delta_{\sigma_{\mathcal{L}^*}})^t$$

$\nabla \widetilde{\Pi}_{\mathcal{D}} u^{\mathcal{T}} - \nabla \Pi_{\mathcal{D}} u^{\mathcal{T}}$ dépend linéairement de $\delta^{\mathcal{D}}$

$\rightsquigarrow$ Existence de matrices $B_{\mathcal{Q}}$

Cas vectoriel :

$$\rightsquigarrow \nabla_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{N}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}} = \nabla^{\mathcal{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}} + {}^t(B_{\mathcal{Q}} \delta^{\mathcal{D}}),\ \forall \mathcal{Q} \subset \mathcal{D}.$$

- $B_{\mathcal{Q}}$ est une matrice 2×4 ne dépendant que de la géométrie de $\mathcal{Q}$.
- $\delta^{\mathcal{D}} = (\delta_{\sigma_{\mathcal{K}}}, \delta_{\sigma_{\mathcal{L}}}, \delta_{\sigma_{\mathcal{K}^*}}, \delta_{\sigma_{\mathcal{L}^*}})^t$ sont 8 inconnues artificielles à déterminer.
- $B_{\mathcal{Q}_{\mathcal{K},\mathcal{K}^*}} = \frac{1}{m_{\mathcal{Q}_{\mathcal{K},\mathcal{K}^*}}} \left(m_{\sigma_{\mathcal{K}}} \vec{\mathbf{n}}_{\mathcal{K}^*\mathcal{L}^*}, 0, m_{\sigma_{\mathcal{K}^*}} \vec{\mathbf{n}}_{\mathcal{K}\mathcal{L}}, 0 \right)$.

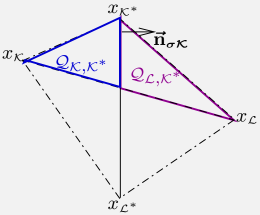
$$\rightsquigarrow \mathrm{D}_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{N}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}} = \frac{1}{2} \left(\nabla_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{N}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}} + {}^t\nabla_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{N}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}} \right),\ \forall \mathcal{Q} \subset \mathcal{D}.$$

Le tenseur des contraintes discret s'écrit alors

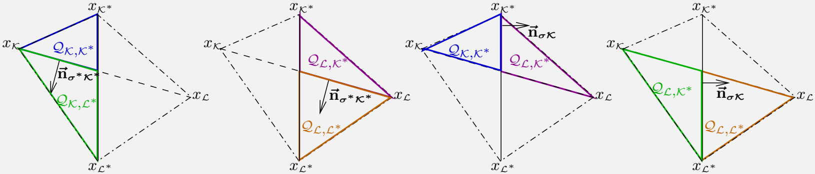
$$\tau_{\mathcal{Q}}\left(\mathrm{D}^{\mathcal{D}}\mathbf{u}^{\boldsymbol{\mathcal{T}}},\delta\right)=\eta_{\mathcal{Q}}(2\mathrm{D}^{\mathcal{D}}\mathbf{u}^{\boldsymbol{\mathcal{T}}}+B_{\mathcal{Q}}\delta^{\mathcal{D}}+{}^{t}(B_{\mathcal{Q}}\delta^{\mathcal{D}}))-\mathbf{p}^{\mathcal{Q}}\mathrm{Id}.$$

Comment déterminer les nouvelles inconnues $\delta=(\delta^{\mathcal{D}},\mathbf{p}^{\mathfrak{Q}}_{\mathcal{D}})$?

- CONSERVATIVITÉ LOCALE DES FLUX DISCRETS



$$\tau_{\mathcal{Q}_{\mathcal{K},\mathcal{K}^*}}(\mathrm{D}^{\mathcal{D}}\mathbf{u}^{\boldsymbol{\mathcal{T}}},\delta)\vec{\mathbf{n}}_{\sigma\mathcal{K}}=\tau_{\mathcal{Q}_{\mathcal{L},\mathcal{K}^*}}(\mathrm{D}^{\mathcal{D}}\mathbf{u}^{\boldsymbol{\mathcal{T}}},\delta)\vec{\mathbf{n}}_{\sigma\mathcal{K}}.$$



$$\begin{cases} \tau_{\mathcal{Q}_{\mathcal{K},\mathcal{K}^*}}(\mathrm{D}^{\mathcal{D}}\mathbf{u}^{\mathcal{T}},\delta)\vec{\mathbf{n}}_{\sigma^*\mathcal{K}^*}=\tau_{\mathcal{Q}_{\mathcal{K},\mathcal{L}^*}}(\mathrm{D}^{\mathcal{D}}\mathbf{u}^{\mathcal{T}},\delta)\vec{\mathbf{n}}_{\sigma^*\mathcal{K}^*} \\ \tau_{\mathcal{Q}_{\mathcal{L},\mathcal{K}^*}}(\mathrm{D}^{\mathcal{D}}\mathbf{u}^{\mathcal{T}},\delta)\vec{\mathbf{n}}_{\sigma^*\mathcal{K}^*}=\tau_{\mathcal{Q}_{\mathcal{L},\mathcal{L}^*}}(\mathrm{D}^{\mathcal{D}}\mathbf{u}^{\mathcal{T}},\delta)\vec{\mathbf{n}}_{\sigma^*\mathcal{K}^*} \\ \tau_{\mathcal{Q}_{\mathcal{K},\mathcal{K}^*}}(\mathrm{D}^{\mathcal{D}}\mathbf{u}^{\mathcal{T}},\delta)\vec{\mathbf{n}}_{\sigma\mathcal{K}}=\tau_{\mathcal{Q}_{\mathcal{L},\mathcal{K}^*}}(\mathrm{D}^{\mathcal{D}}\mathbf{u}^{\mathcal{T}},\delta)\vec{\mathbf{n}}_{\sigma\mathcal{K}} \\ \tau_{\mathcal{Q}_{\mathcal{K},\mathcal{L}^*}}(\mathrm{D}^{\mathcal{D}}\mathbf{u}^{\mathcal{T}},\delta)\vec{\mathbf{n}}_{\sigma\mathcal{K}}=\tau_{\mathcal{Q}_{\mathcal{L},\mathcal{L}^*}}(\mathrm{D}^{\mathcal{D}}\mathbf{u}^{\mathcal{T}},\delta)\vec{\mathbf{n}}_{\sigma\mathcal{K}} \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \underbrace{\sum_{\mathcal{Q}\in\mathfrak{Q}_{\mathcal{D}}} m_{\mathcal{Q}}\tau_{\mathcal{Q}}\left(\mathrm{D}^{\mathcal{D}}\mathbf{u}^{\mathcal{T}},\delta\right)B_{\mathcal{Q}}}_{\in\mathcal{M}_{2,4}(\mathbb{R})}=0.$$

$$(\star) \quad \begin{cases} \displaystyle\sum_{\mathcal{Q}\in\mathfrak{Q}_{\mathcal{D}}} m_{\mathcal{Q}} \tau_{\mathcal{Q}} \left(\mathrm{D}^{\mathcal{D}}\mathbf{u}^{\mathcal{T}}, \delta\right) B_{\mathcal{Q}} = 0, \\ \mathrm{Tr}(B_{\mathcal{Q}}\delta^{\mathcal{D}}) = 0, \forall \mathcal{Q} \subset \mathcal{D}, \qquad \displaystyle\sum_{\mathcal{Q}\in\mathfrak{Q}_{\mathcal{D}}} m_{\mathcal{Q}} p^{\mathcal{Q}} = m_{\mathcal{D}} p^{\mathcal{D}}. \end{cases}$$

Proposition (K. 09)

Pour tout $\mathcal{D} \in \mathfrak{D}$ *et tout* $(\mathrm{D}^{\mathcal{D}}\mathbf{u}^{\mathcal{T}}, p^{\mathcal{D}}) \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}$, *il existe un* $\delta = (\delta^{\mathcal{D}}, \mathbf{p}_{\mathcal{D}}^{\mathfrak{Q}}) \in \mathcal{M}_{4,2}(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^4$ *vérifiant* $(\star)$.

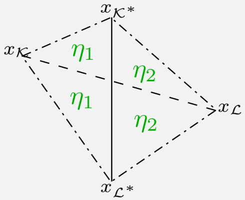
Unicité plus délicate.

Si η est constante sur le diamant

$$\Longrightarrow \delta^{\mathcal{D}} = 0,\ \mathbf{p}_{\mathcal{D}}^{\mathfrak{Q}} = p^{\mathcal{D}}$$

$$\rightsquigarrow \mathrm{D}_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{N}}\mathbf{u}^{\boldsymbol{\mathcal{T}}} = \mathrm{D}^{\mathcal{D}}\mathbf{u}^{\boldsymbol{\mathcal{T}}},\ \text{et}\ \tau_{\mathcal{Q}}\left(\mathrm{D}^{\mathcal{D}}\mathbf{u}^{\boldsymbol{\mathcal{T}}},\delta\right) = \tau_{\mathcal{D}}(\mathrm{D}^{\mathfrak{D}}\mathbf{u}^{\boldsymbol{\mathcal{T}}}, p^{\mathfrak{D}}),\ \forall \mathcal{Q}.$$

Si η est constante par mailles primales



Calculs avec **MAPLE**.

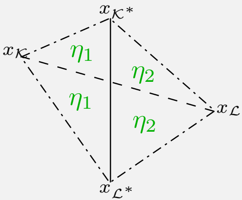
$$\delta_{\mathcal{K}} = \delta_{\mathcal{L}} = 0$$

$$\delta_{\mathcal{K}^*} = \delta_{\mathcal{L}^*} = -\frac{m_{\mathcal{Q}_{\mathcal{K},\mathcal{K}^*}} m_{\mathcal{Q}_{\mathcal{L},\mathcal{K}^*}} (\eta_1 - \eta_2)\mathrm{D}^{\mathcal{D}}\mathbf{u}^{\boldsymbol{\mathcal{T}}}\vec{\mathbf{n}}_{\sigma\mathcal{K}} \cdot \vec{\boldsymbol{\tau}}_{\mathcal{K},\mathcal{L}}}{\eta_2 m_{\mathcal{Q}_{\mathcal{K},\mathcal{K}^*}} + \eta_1 m_{\mathcal{Q}_{\mathcal{L},\mathcal{K}^*}}}\vec{\boldsymbol{\tau}}_{\mathcal{K},\mathcal{L}}$$

$$p_{\mathcal{Q}_{\mathcal{K},\mathcal{K}^*}} = p_{\mathcal{Q}_{\mathcal{K},\mathcal{L}^*}} = p^{\mathcal{D}} + 2(\eta_1 - \eta_2)\mathrm{D}^{\mathcal{D}}\mathbf{u}^{\boldsymbol{\mathcal{T}}}\vec{\mathbf{n}}_{\sigma\mathcal{K}} \cdot \vec{\mathbf{n}}_{\sigma\mathcal{K}} \frac{m_{\mathcal{Q}_{\mathcal{L},\mathcal{K}^*}}}{m_{\mathcal{Q}_{\mathcal{K},\mathcal{K}^*}} + m_{\mathcal{Q}_{\mathcal{L},\mathcal{K}^*}}},$$

$$p_{\mathcal{Q}_{\mathcal{L},\mathcal{K}^*}} = p_{\mathcal{Q}_{\mathcal{L},\mathcal{L}^*}} = p^{\mathcal{D}} - 2(\eta_1 - \eta_2)\mathrm{D}^{\mathcal{D}}\mathbf{u}^{\boldsymbol{\mathcal{T}}}\vec{\mathbf{n}}_{\sigma\mathcal{K}} \cdot \vec{\mathbf{n}}_{\sigma\mathcal{K}} \frac{m_{\mathcal{Q}_{\mathcal{K},\mathcal{K}^*}}}{m_{\mathcal{Q}_{\mathcal{K},\mathcal{K}^*}} + m_{\mathcal{Q}_{\mathcal{L},\mathcal{K}^*}}}.$$

SI η EST CONSTANTE PAR MAILLES PRIMALES



$$\text{Harmonique} = \frac{(h_1+h_2)\eta_1\eta_2}{h_2\eta_1+h_1\eta_2}$$

$$\text{Arithmétique} = \frac{h_1\eta_1+h_2\eta_2}{h_1+h_2}$$

$$\begin{aligned}\tau_{\mathcal{D}}^{\mathcal{N}}\left(\begin{pmatrix}\alpha & \gamma\\ \gamma & \beta\end{pmatrix}, p^{\mathfrak{D}}\right) &= \frac{1}{m_{\mathcal{D}}}\sum_{\mathcal{Q}\subset\mathcal{D}} m_{\mathcal{Q}}\tau_{\mathcal{Q}}\left(\begin{pmatrix}\alpha & \gamma\\ \gamma & \beta\end{pmatrix}, \delta\right),\\ &= 2\begin{pmatrix}A\alpha & \mathbf{H}\gamma\\ \mathbf{H}\gamma & A\beta\end{pmatrix} - p^{\mathcal{D}}\mathrm{Id},\ \text{dans le repère } (\vec{\mathbf{n}}_{\sigma\mathcal{K}}, \vec{\boldsymbol{\tau}}_{\mathcal{K}^*,\mathcal{L}^*}),\end{aligned}$$

à la place de $\tau_{\mathcal{D}}\left(\begin{pmatrix}\alpha & \gamma\\ \gamma & \beta\end{pmatrix}, p^{\mathfrak{D}}\right) = 2\eta_{\mathcal{D}}\begin{pmatrix}\alpha & \gamma\\ \gamma & \beta\end{pmatrix} - p^{\mathcal{D}}\mathrm{Id}.$

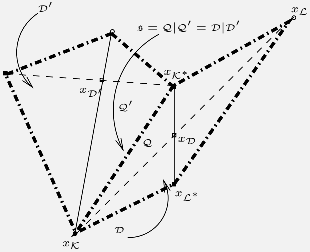
CAS D'UN MAILLAGE CARTÉSIEN : généralisation du schéma MAC.

(Harlow, Welch '65)

$$
\text{(S-m-DDFV)} \quad \begin{cases} \text{Trouver } \mathbf{u}^{\mathcal{T}} \in \mathbb{E}_0 \text{ et } p^{\mathfrak{D}} \in \mathbb{R}^{\mathfrak{D}} \text{ tels que,} \\ \quad \mathbf{div}^{\mathfrak{M}}\left(-\tau_{\mathfrak{D}}^{\mathcal{N}}\left(\mathrm{D}^{\mathfrak{D}}\mathbf{u}^{\mathcal{T}}, p^{\mathfrak{D}}\right)\right) = \mathbf{f}^{\mathfrak{M}}, \\ \quad \mathbf{div}^{\mathfrak{M}^*}\left(-\tau_{\mathfrak{D}}^{\mathcal{N}}\left(\mathrm{D}^{\mathfrak{D}}\mathbf{u}^{\mathcal{T}}, p^{\mathfrak{D}}\right)\right) = \mathbf{f}^{\mathfrak{M}^*}, \\ \quad \mathrm{div}^{\mathfrak{D}}\mathbf{u}^{\mathcal{T}} - \lambda h_{\mathfrak{D}}^2 \underline{\Delta}^{\mathfrak{D}} \mathbf{p}^{\mathfrak{Q}} = 0, \\ \quad \sum_{\mathcal{D}\in\mathfrak{D}} m_{\mathcal{D}} p^{\mathcal{D}} = 0, \end{cases}
$$

avec

$$
\underline{\Delta}^{\mathcal{D}} \mathbf{p}^{\mathfrak{Q}} = \frac{1}{m_{\mathcal{D}}} \sum_{\substack{\mathfrak{s}=\mathcal{Q}|\mathcal{Q}' \\ =\mathcal{D}|\mathcal{D}'\in\mathcal{E}_{\mathcal{D}}}} \frac{h_{\mathcal{D}}^2 + h_{\mathcal{D}'}^2}{h_{\mathcal{D}}^2} (\mathbf{p}^{\mathcal{Q}'} - \mathbf{p}^{\mathcal{Q}}).
$$



Stabilisation à la Brezzi-Pitkäranta par quart de diamant.

Théorème

Soit $\mathcal{T}$ un maillage DDFV.
Il existe une **unique** *solution $(\mathbf{u}^{\mathcal{T}}, p^{\mathfrak{D}})$ au schéma S-m-DDFV. On suppose que η est Lipschitzienne sur chaque quart de diamant.*
Si $\mathbf{u}, p$ sont réguliers sur chaque quart de diamant $\mathfrak{Q}$, on a

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}^{\mathcal{T}}\|_2 + \|\nabla\mathbf{u} - \nabla_{\mathfrak{Q}}^{\mathcal{N}}\mathbf{u}^{\mathcal{T}}\|_2 \leq C\mathrm{size}(\mathcal{T}),$$

et

$$\|p - p^{\mathfrak{Q}}\|_2 \leq C\mathrm{size}(\mathcal{T}).$$

On a besoin de :

- Nouvelle inégalité de Korn discrète.
$$\|\nabla_{\mathfrak{Q}}^{\mathcal{N}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}\|_2 \leq C\|\mathrm{D}_{\mathfrak{Q}}^{\mathcal{N}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}\|_2.$$
$\rightsquigarrow$ Difficultés dues aux inconnues artificielles.

- Comparaisons entre les anciens et les nouveaux opérateurs.

- Théorème de stabilité.
$\rightsquigarrow$ Difficultés dues à la stabilisation par quart de diamant.

- **Erreur de consistance**. Si $(\mathbf{u}, p)$ est régulière sur chaque quart de diamant $\mathcal{Q}$, la difficulté est

$$\sum_{\mathcal{Q}\subset\mathcal{D}} \int_{\mathcal{Q}} |\mathrm{D}\mathbf{u}(z) - \mathrm{D}_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{N}} \mathbb{P}_{\boldsymbol{c}}^{\mathcal{T}} \mathbf{u}(z)|^2 \mathrm{d}z \leq C h_{\mathcal{D}}^2 \sum_{\mathcal{Q}\subset\mathcal{D}} \int_{\mathcal{Q}} (|\nabla \mathbf{u}|^2 + |\nabla^2 \mathbf{u}|^2 + |\nabla \mathbf{p}|^{\mathbf{2}}) \mathrm{d}z.$$

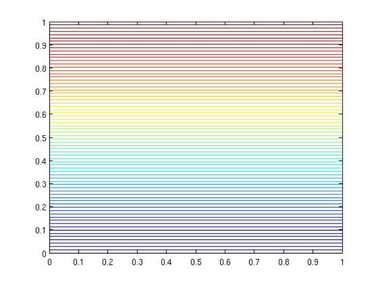
$\rightsquigarrow$ Hypothèse supplémentaire pour obtenir la même inégalité avec

$$\sum_{\mathcal{Q}\subset\mathcal{D}} \int_{\mathcal{Q}} |\nabla \mathbf{u}(z) - \nabla_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{N}} \mathbb{P}_{\boldsymbol{c}}^{\mathcal{T}} \mathbf{u}(z)|^2 \mathrm{d}z.$$

$$\mathbf{u}(x,y) = \begin{pmatrix} \begin{cases} y^2 - 0.5y & \text{pour } y > 0.5 \\ 10^4(y^2 - 0.5y) & \text{sinon.} \end{cases} \\ 0 \end{pmatrix},$$

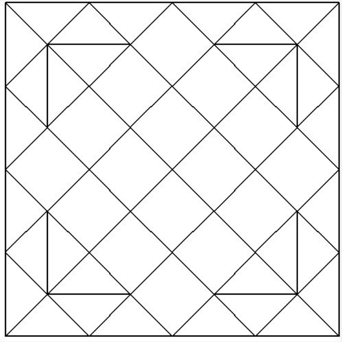
$$p(x,y) = 2x - 1,$$

$$\eta(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{pour } y > 0.5 \\ 10^{-4} & \text{sinon.} \end{cases}$$



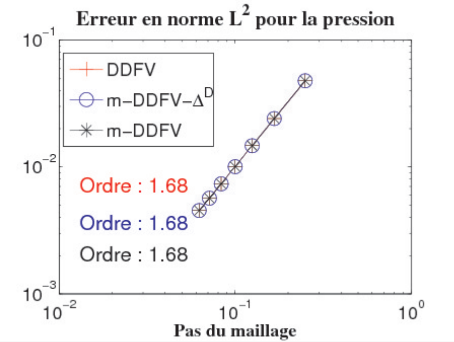
Lignes de courant

Maillage Primal



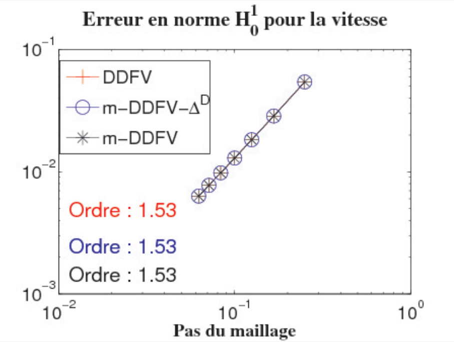
$\rightsquigarrow$ **$\mathfrak{D}$ respecte la discontinuité**

$$\frac{\|\mathbb{P}_c^{\mathfrak{Q}} p - p^{\mathfrak{Q}}\|_2}{\|\mathbb{P}_c^{\mathfrak{Q}} p\|_2}$$

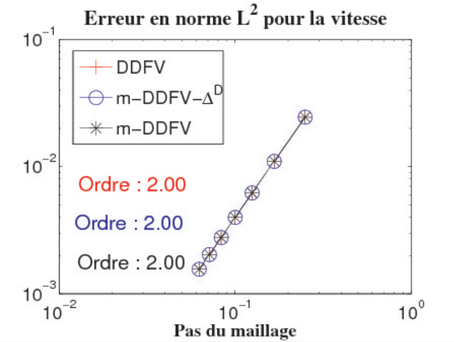


m-DDFV = S-m-DDFV.
m-DDFV-$\Delta^{\mathcal{D}}$ = on remplace la conservation de la masse
$\mathrm{div}^{\mathfrak{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}} - \lambda h_{\mathfrak{D}}^2 \underline{\Delta}^{\mathfrak{D}} \mathbf{p}^{\mathfrak{Q}} = 0$, par $\mathrm{div}^{\mathfrak{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}} - \lambda h_{\mathfrak{D}}^2 \Delta^{\mathfrak{D}} p^{\mathfrak{D}} = 0$.

$$\frac{\|\mathbb{P}_c^{\mathfrak{Q}} \nabla \mathbf{u} - \nabla_{\mathfrak{Q}}^{\mathcal{N}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}\|_2}{\|\mathbb{P}_c^{\mathfrak{Q}} \nabla \mathbf{u}\|_2}$$

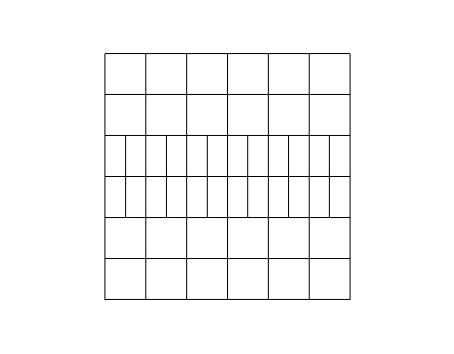


$$\frac{\|\mathbb{P}_c^{\mathcal{T}} \mathbf{u} - \mathbf{u}^{\mathcal{T}}\|_2}{\|\mathbb{P}_c^{\mathcal{T}} \mathbf{u}\|_2}$$

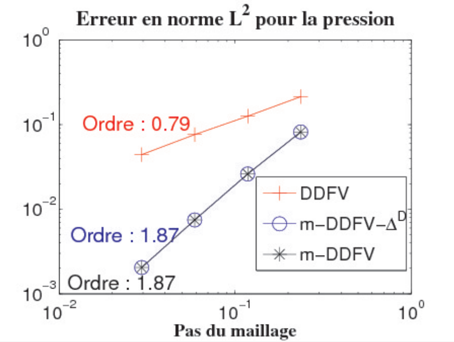


m-DDFV = S-m-DDFV.
m-DDFV-$\Delta^{\mathcal{D}}$ = on remplace la conservation de la masse $\mathrm{div}^{\mathfrak{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}} - \lambda h_{\mathfrak{D}}^2 \underline{\Delta}^{\mathfrak{D}} \mathbf{p}^{\mathfrak{Q}} = 0$, par $\mathrm{div}^{\mathfrak{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}} - \lambda h_{\mathfrak{D}}^2 \Delta^{\mathfrak{D}} p^{\mathfrak{D}} = 0$.

Maillage Primal

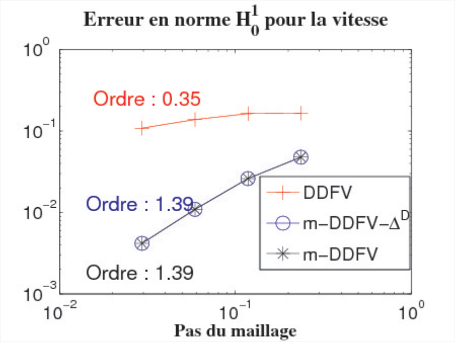


$$\frac{\|\mathbb{P}_c^{\mathfrak{Q}} p - p^{\mathfrak{Q}}\|_2}{\|\mathbb{P}_c^{\mathfrak{Q}} p\|_2}$$

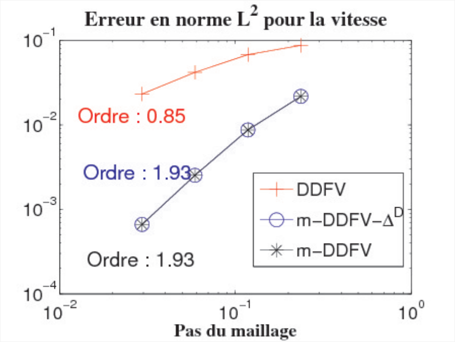


m-DDFV = S-m-DDFV.
m-DDFV-$\Delta^{\mathcal{D}}$ = on remplace la conservation de la masse
$\mathrm{div}^{\mathfrak{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}} - \lambda h_{\mathfrak{D}}^2 \underline{\Delta}^{\mathfrak{D}} \mathbf{p}^{\mathfrak{Q}} = 0$, par $\mathrm{div}^{\mathfrak{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}} - \lambda h_{\mathfrak{D}}^2 \Delta^{\mathfrak{D}} p^{\mathfrak{D}} = 0$.

$$\frac{\|\mathbb{P}_c^{\mathfrak{Q}}\nabla \mathbf{u} - \nabla_{\mathfrak{Q}}^{\mathcal{N}}\mathbf{u}^{\mathcal{T}}\|_2}{\|\mathbb{P}_c^{\mathfrak{Q}}\nabla\mathbf{u}\|_2}$$



$$\frac{\|\mathbb{P}_c^{\mathcal{T}}\mathbf{u} - \mathbf{u}^{\mathcal{T}}\|_2}{\|\mathbb{P}_c^{\mathcal{T}}\mathbf{u}\|_2}$$



m-DDFV = S-m-DDFV.
m-DDFV-$\Delta^{\mathcal{D}}$ = on remplace la conservation de la masse $\mathrm{div}^{\mathfrak{D}}\mathbf{u}^{\mathcal{T}} - \lambda h_{\mathfrak{D}}^2 \underline{\Delta}^{\mathfrak{D}}\mathbf{p}^{\mathfrak{Q}} = 0$, par $\mathrm{div}^{\mathfrak{D}}\mathbf{u}^{\mathcal{T}} - \lambda h_{\mathfrak{D}}^2 \Delta^{\mathfrak{D}} p^{\mathfrak{D}} = 0$.

Nombre total d'inconnues	DDFV	m-DDFV-Δ^D	m-DDFV
392	3 863	3 863	3 959
1 358	14 421	14 421	14 613
5 018	55 551	55 551	55 935
19 250	217 881	217 881	218 645
75 362	862 847	862 847	864 373

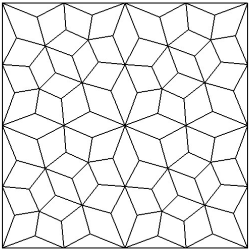
$$\eta(x,y) = \begin{cases} \eta_1 = 10^2 & \text{si } x \le 0.5, \\ \eta_2 = 10^{-2} & \text{sinon.} \end{cases}$$

On note $c = -\frac{\eta_2 \pi}{\eta_1 + 0.5\eta_2\pi}$.

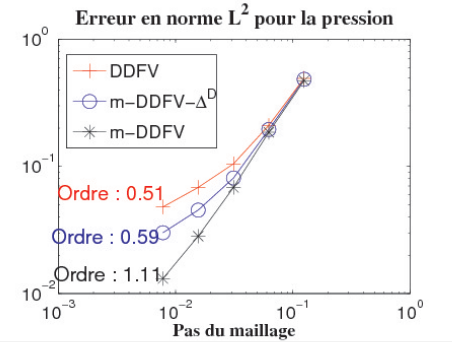
$$\mathbf{u}(x,y) = \begin{pmatrix} \begin{cases} (x-0.5)(cx+\sin(5.0\pi x))\dfrac{4.0\pi\cos(4.0\pi y)}{0.5c+1}, & \text{si } x \le 0.5, \\ (x-0.5)(\cos(\pi x)+1)4.0\pi\cos(4.0\pi y), & \text{sinon.} \end{cases} \\ \begin{cases} -(cx+\sin(5.0\pi x)+(x-0.5)(c+5.0\pi\cos(5.0\pi x)))\dfrac{\sin(4.0\pi y)}{0.5c+1}, & \text{si } x \le 0.5, \\ -(\cos(\pi x)+1-\pi(x-0.5)\sin(\pi x))\sin(4.0\pi y), & \text{sinon.} \end{cases} \end{pmatrix}$$

$$p(x,y) = \begin{cases} \cos(4\pi x)\sin(4\pi y) + 8.0\pi(\eta_1 - \eta_2)\cos(4\pi y), & \text{si } x \le 0.5, \\ \cos(4\pi x)\sin(4\pi y), & \text{sinon.} \end{cases}$$

Maillage Primal



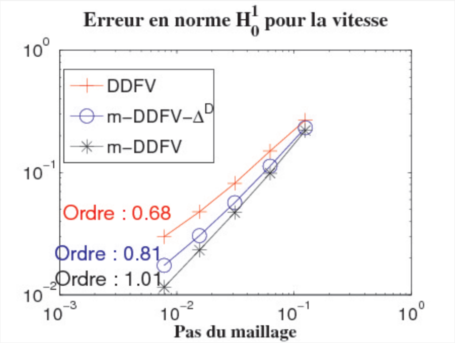
$$\frac{\|\mathbb{P}_c^{\mathfrak{Q}} p - p^{\mathfrak{Q}}\|_2}{\|\mathbb{P}_c^{\mathfrak{Q}} p\|_2}$$



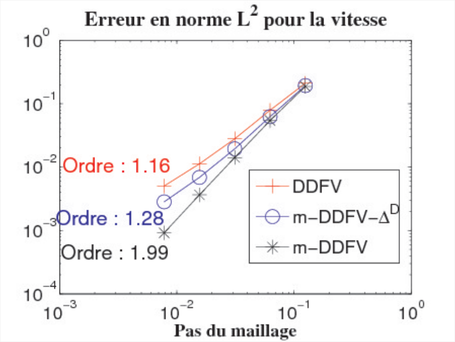
m-DDFV = S-m-DDFV.
m-DDFV-$\Delta^{\mathcal{D}}$ = on remplace la conservation de la masse
$\mathrm{div}^{\mathfrak{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}} - \lambda h_{\mathfrak{D}}^2 \underline{\Delta}^{\mathfrak{D}} \mathbf{p}^{\mathfrak{Q}} = 0$, par $\mathrm{div}^{\mathfrak{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}} - \lambda h_{\mathfrak{D}}^2 \Delta^{\mathfrak{D}} p^{\mathfrak{D}} = 0$.

Illustration numérique

$$\frac{\|\mathbb{P}_c^{\mathfrak{Q}}\nabla \mathbf{u} - \nabla_{\mathfrak{Q}}^{\mathcal{N}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}\|_2}{\|\mathbb{P}_c^{\mathfrak{Q}}\nabla \mathbf{u}\|_2}$$



$$\frac{\|\mathbb{P}_c^{\mathcal{T}}\mathbf{u} - \mathbf{u}^{\mathcal{T}}\|_2}{\|\mathbb{P}_c^{\mathcal{T}}\mathbf{u}\|_2}$$



m-DDFV = S-m-DDFV.
m-DDFV-$\Delta^{\mathcal{D}}$ = on remplace la conservation de la masse
$\mathrm{div}^{\mathfrak{D}}\mathbf{u}^{\mathcal{T}} - \lambda h_{\mathfrak{D}}^2 \underline{\Delta}^{\mathfrak{D}}\mathbf{p}^{\mathfrak{Q}} = 0$, par $\mathrm{div}^{\mathfrak{D}}\mathbf{u}^{\mathcal{T}} - \lambda h_{\mathfrak{D}}^2 \Delta^{\mathfrak{D}} p^{\mathfrak{D}} = 0$.

Nombre total d'inconnues	DDFV	m-DDFV-$\Delta^{\mathcal{D}}$	m-DDFV
2 226	39 363	39 379	39 443
8 674	159 763	159 797	159 927
34 242	644 019	644 093	644 363
136 066	2 586 355	2 586 495	2 587 120
542 466	10 366 323	10 366 645	10 368 019

- Grâce à un **terme de stabilisation**, l'approche DDFV a toutes les bonnes propriétés attendues :
    - **Système bien posé** et stable sur des maillages très généraux.
    - **Estimations d'erreur** :
        - Ordre 1 en pression en norme L^2.
        - Ordre 1 en vitesse en norme H^1.
        - Numériquement : ordre 2 en vitesse en norme L^2.
    - Implémentation facile **en parcourant les arêtes (=les diamants).**
- **Viscosité discontinue** : on garde les bonnes propriétés en adoptant **l'approche S-m-DDFV.**

  Celle-ci est assez lourde sur le papier mais numériquement indolore.

Prise en compte du terme non-linéaire $(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}$ en 2D

(K. '11)

- Discrétisation des équations de Navier-Stokes instationnaires.
- Approximation du terme non-linéaire en utilisant les flux de masse (prenant compte la stabilisation) pour définir le terme d'inertie (inspiré de **(Eymard-Gallouët-Herbin-Latché '05)**).
- Première étude avec les estimations d'énergie.
- Reste à faire l'étude de la convergence.

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} -\cos(2\pi x)\sin(2\pi y)e^{-2t} \\ \sin(2\pi x)\cos(2\pi y)e^{-2t} \end{pmatrix}, \qquad p = -\frac{1}{4}(\cos(4\pi x) + \cos(4\pi y))e^{-4t}.$$

$\Omega =]0,1[^2$ avec le maillage en damier, avec $T = 1$ et $\delta t = 10^{-2}$.

NbCell	Ervel	Ratio	Ergradvel	Ratio	Erpre	Ratio
208	2.804E-02	-	8.508E-02	-	1.526E+00	-
736	6.761E-03	2.052	4.309E-02	0.9815	6.574E-01	1.215
2752	1.803E-03	1.907	2.158E-02	0.9973	3.237E-01	1.022
10624	6.045E-04	1.577	1.079E-02	1.001	1.633E-01	0.9874

EXTENSIONS À PLUS LONG TERMES DANS CE DOMAINE

- Conditions aux limites en contrainte ou sauts de contrainte dans le système (tension de surface).
  - Conditions faciles en prendre en compte dans le schéma.
  - Difficulté dans l'inégalité de Korn.

- Dépendance non-linéaire de la viscosité en fonction de $D\mathbf{u}$ (fluides non newtoniens).
  - Les méthodes DDFV sont un cadre approprié pour ce genre de problème (voir modèle de Leray-Lions dans **(Boyer-Hubert '08)**).

- Poursuivre l'extension des différents résultats en 3D.