

Estimateurs d'erreur a posteriori pour les équations de la magnétodynamique en formulation harmonique potentielle

Z. Tang¹, E. Creusé², S. Nicaise³,
Y. Le Menach⁴, F. Piriou⁴ et N. Nemitz⁵

¹LPP et LAMEL, Université Lille 1

²LPP, Université Lille 1 - INRIA Lille Nord Europe

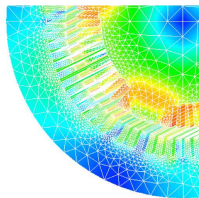
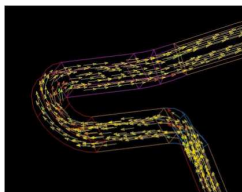
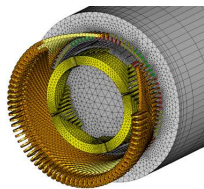
³LAMAV, Université de Valenciennes

⁴L2EP, Université Lille 1

⁵EDF R & D, Clamart

IHP, Paris, 6 Juillet 2011

- Code Avancé de Recherche en Modélisation Electromagnétique,
- Code de production EDF R&D, développé par le L2EP et EDF R&D,
- Résolution des équations de Maxwell ARQS.



- ① Estimateur a posteriori ?
- ② Equations et formulation faible
- ③ Définition de l'estimateur
- ④ Fiabilité
- ⑤ Efficacité
- ⑥ Résultats numériques

- 1 Estimateur a posteriori ?
- 2 Equations et formulation faible
- 3 Définition de l'estimateur
- 4 Fiabilité
- 5 Efficacité
- 6 Résultats numériques

Problème modèle : $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $A(u) = f$.

Formulation variationnelle continue :

Trouver $u \in V$ tel que $a(u, v) = (f, v) \forall v \in V$.

Formulation variationnelle discrète : $V_h \subset V$

Trouver $u_h \in V_h$ tel que $a(u_h, v_h) = (f, v_h) \forall v_h \in V_h$.

Question :

On définit $e_h = u - u_h$. Peut-on trouver $\eta(u_h)$ tel que :

Fiabilité: $\|e_h\|_{\Omega} \lesssim \eta(u_h)$? Efficacité: $\eta_T(u_h) \lesssim \|e_h\|_{\omega_T}$?

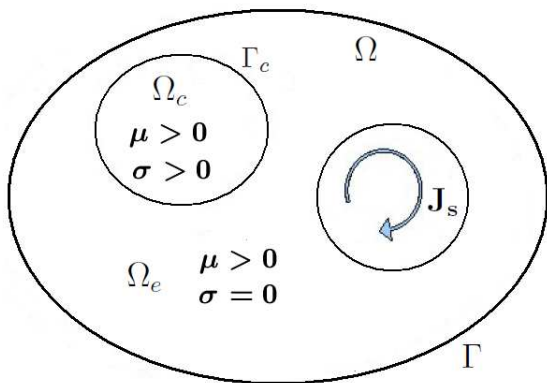
- 1 Estimateur a posteriori ?
- 2 Equations et formulation faible**
- 3 Définition de l'estimateur
- 4 Fiabilité
- 5 Efficacité
- 6 Résultats numériques

Modèle général

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ \text{rot } \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{J} \text{ (App. quasistatique)} \\ \text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{J}_s + \mathbf{J}_e \end{array} \end{array} \right.$$

Lois de comportement

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \\ \mathbf{J}_e = \sigma \mathbf{E}. \end{array} \right.$$



$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \Gamma,$$

$$\mathbf{J}_e \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \Gamma_c.$$

Dans Ω_c : Formulation en champs

- En champ \mathbf{E} : $\text{rot } \frac{1}{\mu} \text{rot } \mathbf{E} + \sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0.$
- En champ \mathbf{H} : $\text{rot } \frac{1}{\sigma} \text{rot } \mathbf{H} + \mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = 0.$

Dans Ω tout entier : Formulations potentielles

$$\begin{cases} \text{div } \mathbf{B} = 0 \\ \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \Gamma \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A} \\ \mathbf{A} \times \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \Gamma \end{cases}$$

+ Jauge : $\text{div } \mathbf{A} = 0.$

$$\text{rot}(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}) = 0 \Rightarrow \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \varphi \text{ dans } \Omega_c.$$

+ Jauge : φ de moyenne nulle sur $\Omega_c.$

Problème aux limites

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{rot} \left(\frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \mathbf{A} \right) + \sigma \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \nabla \varphi \right) = \mathbf{J}_s \text{ dans } \Omega, \\ \operatorname{div} \left(\sigma \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \nabla \varphi \right) \right) = 0 \text{ dans } \Omega_c, \\ \mathbf{A} \times \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \Gamma, \\ \varphi \text{ de moyenne nulle} \quad \text{sur } \Omega_c. \end{array} \right.$$

On considère alors la formulation harmonique : $\mathbf{A} = \tilde{\mathbf{A}}(x) e^{j\omega t}$.

Formulation variationnelle

Trouver $(\mathbf{A}, \varphi) \in V$ tels que pour tout $(\mathbf{A}', \varphi') \in V$:

$$\int_{\Omega} \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \mathbf{A} \cdot \operatorname{rot} \overline{\mathbf{A}'} + \int_{\Omega_c} \sigma(j\omega \mathbf{A} + \nabla \varphi) \overline{\mathbf{A}'} = \int_{\Omega} \mathbf{J}_s \cdot \overline{\mathbf{A}'} \text{ dans } \Omega,$$

$$\int_{\Omega_c} \sigma(j\omega \mathbf{A} + \nabla \varphi) \cdot \nabla \overline{\varphi'} = 0 \text{ dans } \Omega_c,$$

Formulation variationnelle équivalente

Trouver $(\mathbf{A}, \varphi) \in V$ solution de

$$a((\mathbf{A}, \varphi), (\mathbf{A}', \varphi')) = l((\mathbf{A}', \varphi')), \forall (\mathbf{A}', \varphi') \in V, \text{ avec}$$

$$\begin{aligned} a((\mathbf{A}, \varphi), (\mathbf{A}', \varphi')) &= \int_{\Omega} \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \mathbf{A} \cdot \operatorname{rot} \overline{\mathbf{A}'} \\ &\quad - \int_{\Omega_c} \frac{j\sigma}{\omega} (j\omega \mathbf{A} + \nabla \varphi) \overline{(j\omega \mathbf{A}' + \nabla \varphi')}, \\ l((\mathbf{A}', \varphi')) &= \int_{\Omega} \mathbf{J}_s \cdot \overline{\mathbf{A}'}. \end{aligned}$$

$V = X^0(\Omega) \times \widetilde{H}^1(\Omega_c)$ et :

$$X(\Omega) = \left\{ \mathbf{A} \in L^2(\Omega); \operatorname{rot} \mathbf{A} \in L^2(\Omega) \text{ et } \mathbf{A} \times \mathbf{n} = \mathbf{0} \text{ sur } \Gamma \right\},$$

$$X^0(\Omega) = \left\{ \mathbf{A} \in X(\Omega); (\mathbf{A}, \nabla \xi) = 0 \forall \xi \in H_0^1(\Omega) \right\},$$

$$\widetilde{H}^1(\Omega_c) = \left\{ \varphi \in H^1(\Omega_c); \int_{\Omega_c} \varphi = 0 \right\}.$$

Normes naturelles

$$\|\mathbf{A}\|_{X(\Omega)}^2 = \|\mathbf{A}\|^2 + \|\operatorname{rot} \mathbf{A}\|^2, \quad \|(\mathbf{A}, \varphi)\|_V^2 = \|\mathbf{A}\|_{X(\Omega)}^2 + |\varphi|_{1, \Omega_c}^2.$$

Formulation variationnelle

Trouver $(\mathbf{A}_h, \varphi_h) \in V_h$ solution de :

$$a((\mathbf{A}_h, \varphi_h), (\mathbf{A}'_h, \varphi'_h)) = l((\mathbf{A}'_h, \varphi'_h)), \forall (\mathbf{A}'_h, \varphi'_h) \in V_h,$$

avec $V_h = X_h^0 \times \tilde{\Theta}_h$ et :

$$X_h = \left\{ \mathbf{A}_h \in X(\Omega); \mathbf{A}_h|_T \in \mathcal{ND}_1(T), \forall T \in \mathcal{T}_h \right\},$$

$$\mathcal{ND}_1(T) = \left\{ A_h : \begin{array}{l} T \longrightarrow \mathbb{C}^3 \\ \mathbf{x} \longrightarrow \mathbf{a} + \mathbf{b} \times \mathbf{x} \end{array}, \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{C}^3 \right\},$$

$$\Theta_h^0 = \left\{ \xi_h \in H_0^1(\Omega); \xi_h|_T \in \mathbb{P}_1(T) \forall T \in \mathcal{T}_h \right\},$$

$$X_h^0 = \left\{ \mathbf{A}_h \in X_h; (\mathbf{A}_h, \nabla \xi_h) = 0 \forall \xi_h \in \Theta_h^0 \right\},$$

$$\tilde{\Theta}_h = \left\{ \varphi_h \in \tilde{H}^1(\Omega_c); \varphi_h|_T \in \mathbb{P}_1(T) \forall T \in \mathcal{T}_h \right\}.$$

Cas continu...

Soit $(\mathbf{A}, \varphi) \in V$ la solution du problème continu. Alors pour tout $(\mathbf{A}', \varphi') \in X(\Omega) \times \widetilde{H}^1(\Omega_c)$, on a :

$$a((\mathbf{A}, \varphi), (\mathbf{A}', \varphi')) = l((\mathbf{A}', \varphi')).$$

Preuve

- ① $\mathbf{A}' = \Psi + \nabla \tau$ avec $\Psi \in X^0(\Omega)$ and $\tau \in H_0^1(\Omega)$,
- ② $\operatorname{div} \mathbf{J}_s = 0$.

Cas discret...

Soit $(\mathbf{A}_h, \varphi_h) \in V_h$ la solution du problème discret. Alors pour tout $(\mathbf{A}'_h, \varphi'_h) \in X_h \times \widetilde{\Theta}_h$, on a :

$$a((\mathbf{A}_h, \varphi_h), (\mathbf{A}'_h, \varphi'_h)) = l((\mathbf{A}'_h, \varphi'_h)).$$

Relation d'orthogonalité :

Pour tout $(\mathbf{A}'_h, \varphi'_h) \in X_h \times \tilde{\Theta}_h$, on a :

$$a((\mathbf{e}_A, e_\varphi), (\mathbf{A}'_h, \varphi'_h)) = 0,$$

avec :

$$\begin{cases} \mathbf{e}_A &= \mathbf{A} - \mathbf{A}_h \in X(\Omega), \\ e_\varphi &= \varphi - \varphi_h \in \widetilde{H}^1(\Omega_c). \end{cases}$$

La question...

- Majoration globale ?

$$\left(\int_{\Omega} \frac{1}{\mu} |\operatorname{rot} \mathbf{e}_A|^2 + \int_{\Omega_c} \frac{\sigma}{\omega} |j\omega \mathbf{e}_A + \nabla e_\varphi|^2 \right)^{1/2} \lesssim \eta \quad ?$$

- Minoration locale disponible ?

- 1 Estimateur a posteriori ?
- 2 Equations et formulation faible
- 3 Définition de l'estimateur**
- 4 Fiabilité
- 5 Efficacité
- 6 Résultats numériques

Estimateur local sur un tétraèdre T

$$\eta_T^2 = \eta_{T;1}^2 + \eta_{T;2}^2 + \eta_{T;3}^2 + \sum_{F \subset \partial T} (\eta_{F;1}^2 + \eta_{F;2}^2), \text{ avec :}$$

$$\eta_{T;1} = h_T \left\| \pi_h \mathbf{J}_s - \text{rot} \left(\frac{1}{\mu} \text{rot} \mathbf{A}_h \right) - \sigma(j\omega \mathbf{A}_h + \nabla \varphi_h) \right\|_T,$$

$$\eta_{T;2} = h_T \left\| \mathbf{J}_s - \pi_h \mathbf{J}_s \right\|_T,$$

$$\eta_{T;3} = h_T \left\| \text{div} (\sigma(j\omega \mathbf{A}_h + \nabla \varphi_h)) \right\|_T,$$

$$\eta_{F;1} = h_F^{1/2} \left\| \left[\mathbf{n} \times \frac{1}{\mu} \text{rot} \mathbf{A}_h \right]_F \right\|_F,$$

$$\eta_{F;2} = h_F^{1/2} \left\| \left[\sigma(j\omega \mathbf{A}_h + \nabla \varphi_h) \cdot \mathbf{n} \right]_F \right\|_F.$$

- 1 Estimateur a posteriori ?
- 2 Equations et formulation faible
- 3 Définition de l'estimateur
- 4 Fiabilité**
- 5 Efficacité
- 6 Résultats numériques

Estimateur global

$$\eta^2 = \sum_{T \in \mathcal{T}} \eta_T^2.$$

Borne supérieure

$$\left(\int_{\Omega} \frac{1}{\mu} |\operatorname{rot} \mathbf{e}_A|^2 + \int_{\Omega_c} \frac{\sigma}{\omega} |j\omega \mathbf{e}_A + \nabla e_\varphi|^2 \right)^{1/2} \lesssim C_{up} \eta,$$

avec :

$$C_{up} = \max \left\{ \max_{T \in \Omega} \mu_T^{1/2}, \frac{1}{\omega^{1/2}} \max_{T \in \Omega_c} \left\{ \frac{1}{\sigma_T^{1/2}} \right\} \right\}.$$

Extension de e_φ dans Ω

$$e_\varphi = \varphi - \varphi_h \in \widetilde{H}^1(\Omega_c).$$

$e_\varphi^{(e)}$ est défini dans $H^1(\Omega_e)$ par :

$$\begin{cases} \Delta e_\varphi^{(e)} & = & 0 & \text{dans } \Omega_e, \\ e_\varphi^{(e)}|_{\Gamma_c} & = & e_\varphi|_{\Gamma_c}, \\ e_\varphi^{(e)}|_{\Gamma} & = & 0, \end{cases}$$

et $\widetilde{e}_\varphi \in H_0^1(\Omega)$ par :

$$\widetilde{e}_\varphi = \begin{cases} e_\varphi & \text{dans } \Omega_c, \\ e_\varphi^{(e)} & \text{dans } \Omega_e. \end{cases}$$

Décomposition de l'erreur...

On a :

$$j\omega \mathbf{e}_A + \nabla \widetilde{e}_\varphi = \nabla \hat{\varphi} + \mathbf{e}_\perp,$$

avec $\hat{\varphi} \in H_0^1(\Omega)$, $e_\perp \in X^0(\Omega)$, et:

$$|\hat{\varphi}|_{1,\Omega_c} \lesssim \|j\omega \mathbf{e}_A + \nabla e_\varphi\|_{\Omega_c},$$

$$\|\mathbf{e}_\perp\|_{X(\Omega)} \lesssim \|j\omega \mathbf{e}_A + \nabla e_\varphi\|_{\Omega_c} + \omega \|\text{rot } \mathbf{e}_A\|.$$

Décomposition de l'erreur (suite)...

De plus :

$$\mathbf{e}_\perp = \nabla\Phi + \mathbf{w},$$

où $\Phi \in H_0^1(\Omega)$, $\mathbf{w}_c = \mathbf{w}|_{\Omega_c} \in H^1(\Omega_c)^3$, $\mathbf{w}_e = \mathbf{w}|_{\Omega_e} \in H^1(\Omega_e)^3$, et :

$$\begin{aligned} |\Phi|_1 &\lesssim \|\mathbf{e}_\perp\|_{X(\Omega)}, \\ (\|\mathbf{w}_c\|_{1,\Omega_c}^2 + \|\mathbf{w}_e\|_{1,\Omega_e}^2)^{1/2} &\lesssim \|\mathbf{e}_\perp\|_{X(\Omega)}. \end{aligned}$$

- 1 Estimateur a posteriori ?
- 2 Equations et formulation faible
- 3 Définition de l'estimateur
- 4 Fiabilité
- 5 Efficacité
- 6 Résultats numériques

Borne inférieure

On a :

$$\eta_T \lesssim C_{T,\text{down}} \left(\left\| \sqrt{\frac{1}{\mu}} \text{rot } \mathbf{e}_\mathbf{A} \right\|_{\omega_T} + \left\| \frac{\sigma^{1/2}}{\omega^{1/2}} (j\omega \mathbf{e}_\mathbf{A} + \nabla e_\varphi) \right\|_{\omega_T} \right)^{1/2} + h.o.t. ,$$

avec

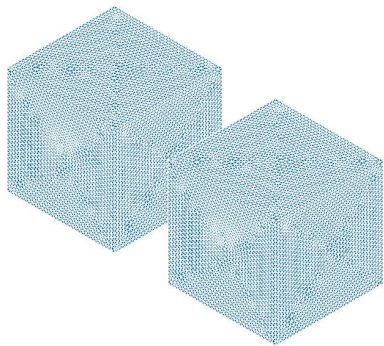
$$C_{T,\text{down}} = \max_{\bar{T}' \cap \bar{T} \neq \emptyset} \max \left\{ \mu_{T'}^{-1/2}, \omega^{1/2} h_{T'} \sigma_{T'}^{1/2} \right\}.$$

Outils

Fonctions bulles et inégalités inverses

- 1 Estimateur a posteriori ?
- 2 Equations et formulation faible
- 3 Définition de l'estimateur
- 4 Fiabilité
- 5 Efficacité
- 6 Résultats numériques

$$f(x, y, z) = \begin{cases} (x^2 - 1)^4(y^2 - 1)^4(z^2 - 1)^4 & \text{dans } \Omega_J = [-1, 1]^3, \\ 0 & \text{dans } \Omega \setminus \Omega_J, \end{cases}$$

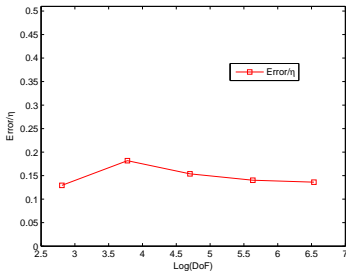
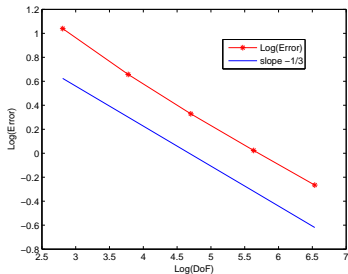


$$\mathbf{A} = \text{rot} \begin{pmatrix} f \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$
$$\varphi \equiv 0.$$

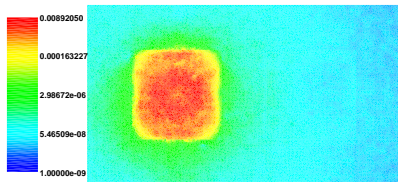
Erreur

$$\left(\int_{\Omega} \frac{1}{\mu} |\operatorname{rot} \mathbf{e}_A|^2 + \int_{\Omega_c} \frac{\sigma}{\omega} |j\omega \mathbf{e}_A + \nabla e_{\varphi}|^2 \right)^{1/2}$$

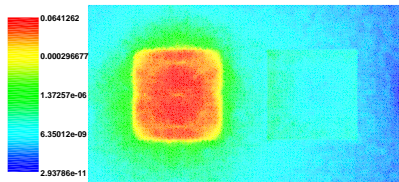
Ordre de convergence et effectivity index



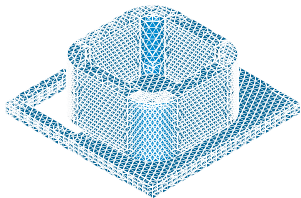
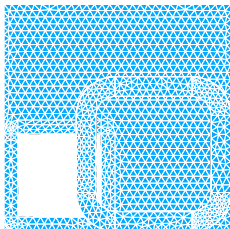
Cas test analytique: Carte d'erreur



(a) Erreur



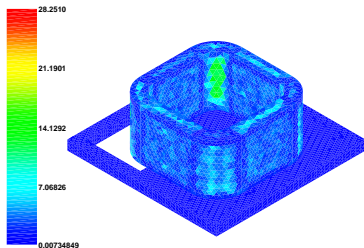
(b) Estimateur



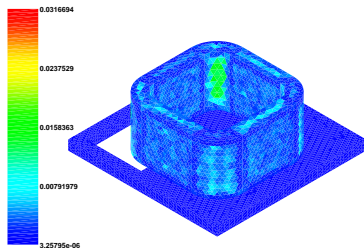
- Fréquence $f = 0.1$ Hz
- $\mu_{\text{plaque}} = 50\mu_0$
- Magnétodynamique $\mathbf{A} - \varphi$
- Magnétostatique \mathbf{A} :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{rot} \left(\frac{1}{\mu} \text{rot} \mathbf{A} \right) = \mathbf{J}_s \text{ dans } \Omega, \\ \mathbf{A} \times \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \Gamma. \end{array} \right.$$

Comparaison statique/dynamique basse fréquence



(c) $A - \varphi$



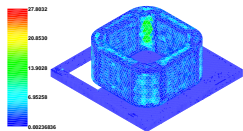
(d) A

Epaisseur de peau

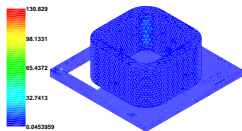
$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}}$$

Paramètres

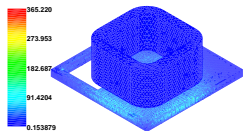
cas test	1	2	3	4	5	6
μ/μ_0	1	1	1	50	50	50
$f(\text{Hz})$	2	20	200	2	20	200
$\delta(\text{m})$	0.059	0.019	0.006	0.0085	0.0027	0.0008
$\delta/0.0019(\%)$	315.26	100.00	31.58	44.74	14.21	4.21



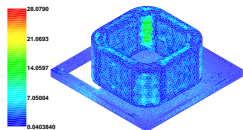
(a) $\mu = 1, f = 2$



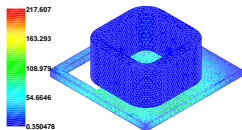
(b) $\mu = 1, f = 20$



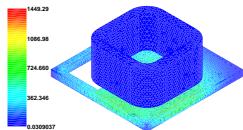
(c) $\mu = 1, f = 200$



(d) $\mu = 50, f = 2$

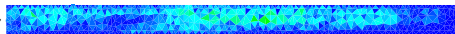
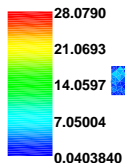


(e) $\mu = 50, f = 20$

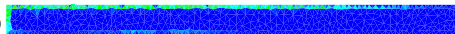
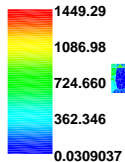
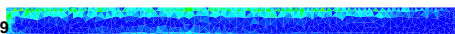
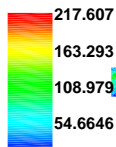


(f) $\mu = 50, f = 200$

$$\mu = 50, f = 2/20/200\text{Hz}$$



épaisseur de l'effet
de peau



Plaque	19
f=2	8.5
f=20	2.7
f=200	0.8

Merci pour votre attention !