Multirésolution adaptative pour la simulation d'écoulements visqueux compressibles

C. Tenaud

1 - LIMSI, UPR CNRS 3251, Orsay, France

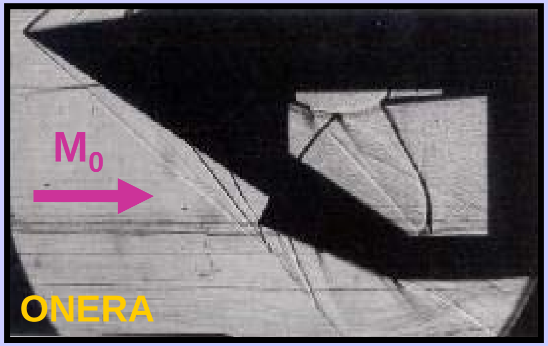
Motivations

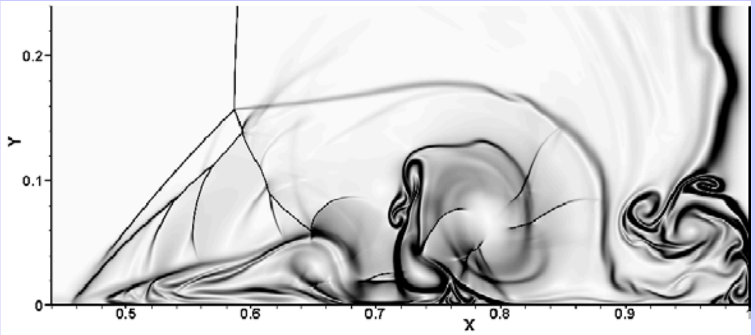
Laboratoire d'Informatique pour la Mécanique et les Sciences de l'Ingénieur

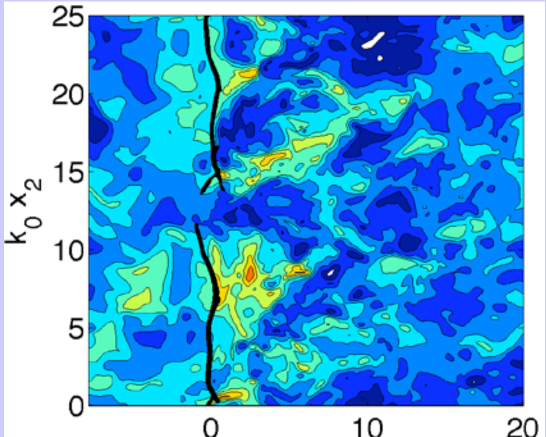
Objectifs : Prédictions fiables écoulements compressibles

Multiplicité d'échelles spatiales et temporelles

- Onde de choc / Turbulence ➔ déformation choc aux p^{tes} échelles ;
- Production de vorticité par effet barocline ;
- …







S.K. Lele *et al.*

Approches : Schéma d'ordre élevé : limitation de la diffusion

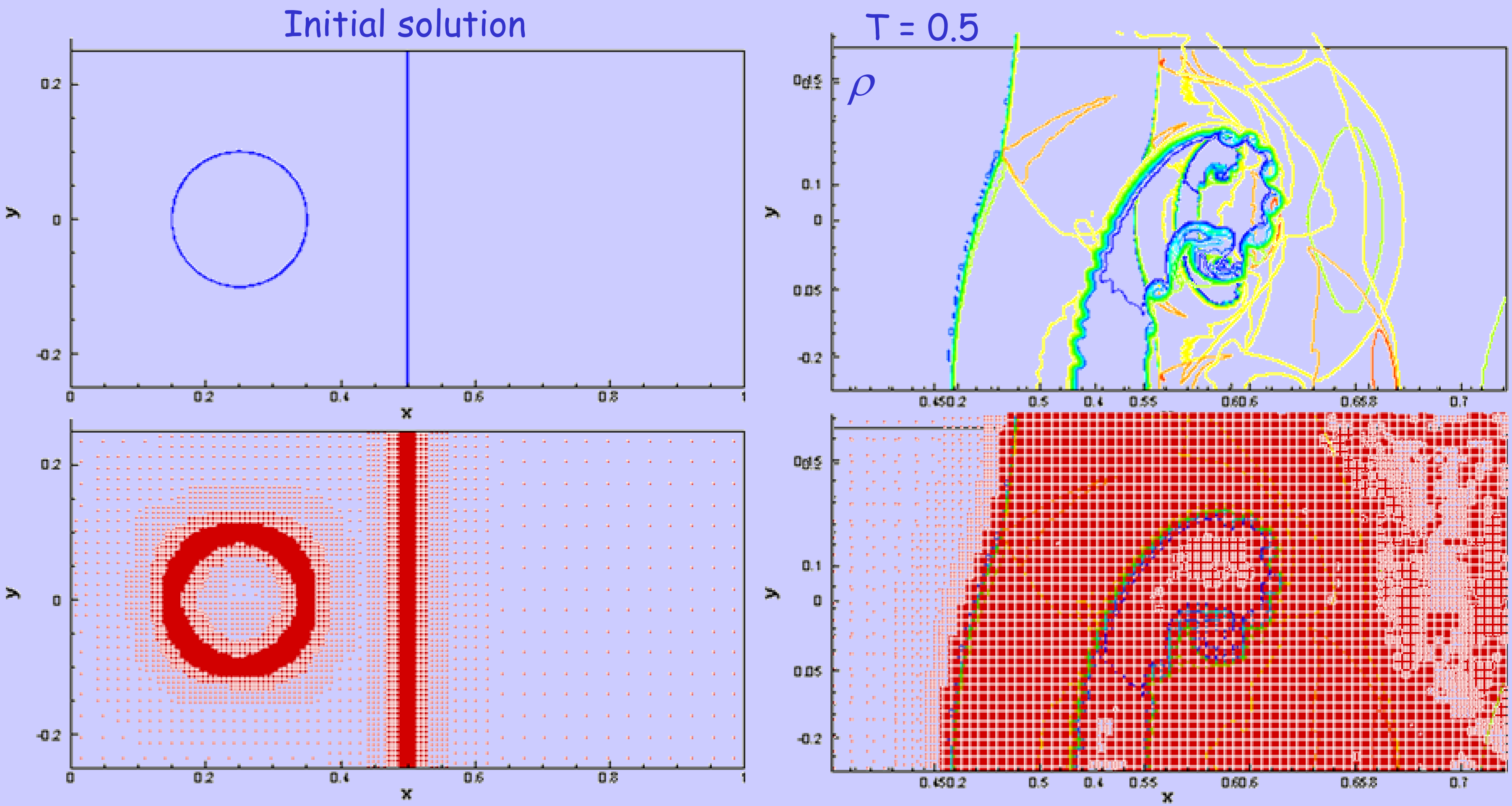
Capture des discontinuités : dispositif ad-hoc

Multirésolution adaptative : AMR / ondelettes.

Cas-Test Euler 2D : Choc / Bulle

Laboratoire d'Informatique pour la Mécanique et les Sciences de l'Ingénieur

$M_0 = 2.\ ;\ \gamma = 1.4\ ;\ (x \times y) \in [0,1] \times [-0.25, 0.25]\ ;\quad T_b = 3.333$



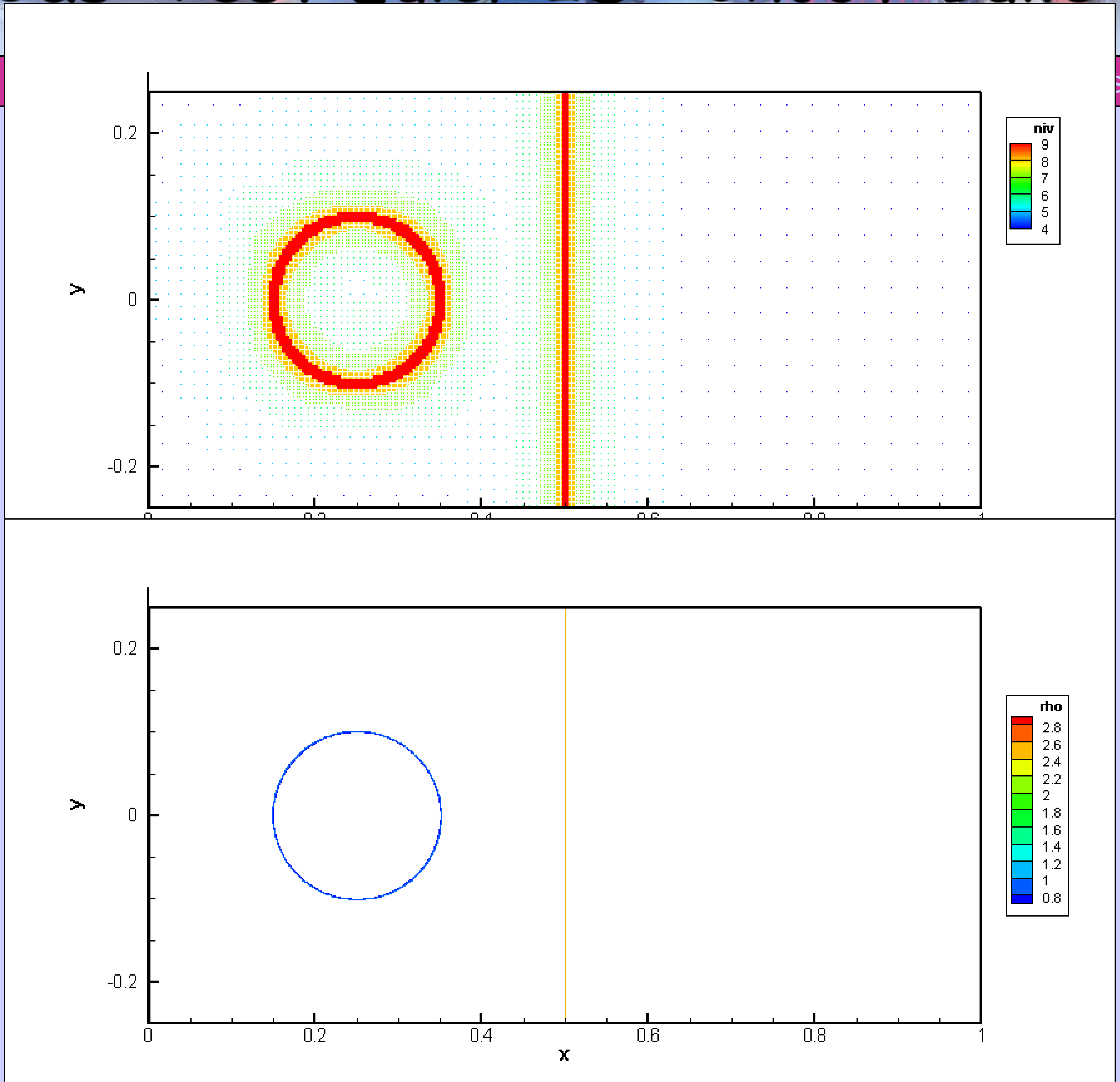
Cas-Test Euler 2D : Choc / Bulle

maillage

Niv = 9

$\varepsilon = 10^{-2}$

densité



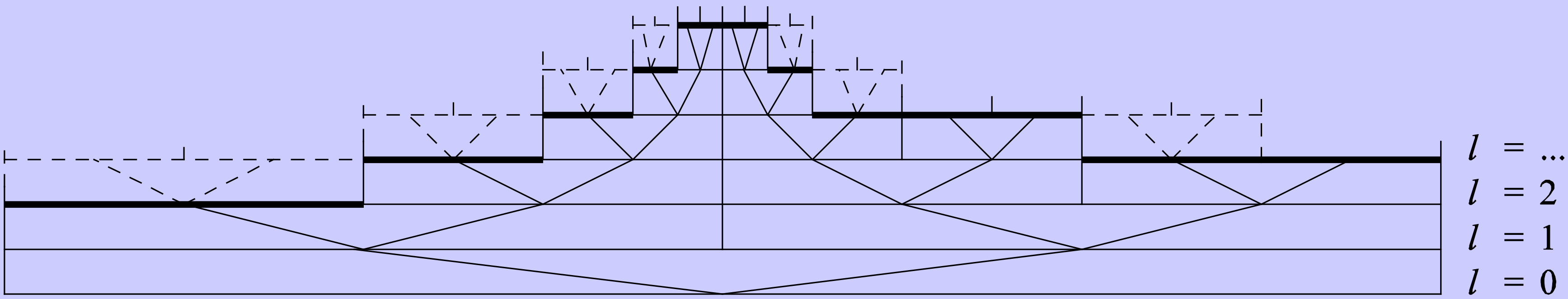
Adaptation - Multirésolution

MLAT : Brandt (1977) **AMR** : Berger *et al.* (1984-1989)

MRA : Multi-Resolution Analysis

- Harten (1994-1995) : multirésolution & syst. hyperb.
- Cohen at al. (2003) : formalisme base d’ondelettes

  ➔ multirésol. compl^t adaptative



$\Omega_{0,0} = \Omega$

Equations (1) : Navier-Stokes

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathbf{U}(\boldsymbol{t},\mathbf{x})}{\partial \boldsymbol{t}} + \nabla \cdot \left[\mathbf{F}\left(\mathbf{U}(\boldsymbol{t},\mathbf{x}), \nabla \mathbf{U}\right)\right] = 0. & \mathbf{x} \in \Omega, \quad \boldsymbol{t} > 0. \\ \mathrm{U}(0,\mathbf{x}) = \mathbf{u_0}(\mathbf{x}) & \mathbf{x} \in \Omega \\ \mathbf{g}\left[\mathbf{U}(\boldsymbol{t},\mathbf{x}), \nabla \mathbf{U}(\boldsymbol{t},\mathbf{x})\right] = 0. & \mathbf{x} \in \partial\Omega \quad \boldsymbol{t} > 0. \end{cases}$$

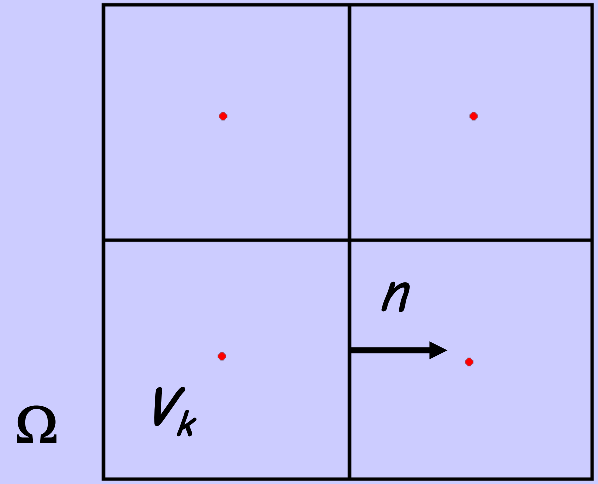
$$\mathbf{U}(\boldsymbol{t},\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho \mathbf{u} \\ \rho \boldsymbol{E} \end{pmatrix} \quad ; \quad \mathbf{F}(\boldsymbol{t},\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \rho \mathbf{u} \\ \rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} + \dfrac{\boldsymbol{P}}{\gamma \boldsymbol{M}^2} \mathbf{I} \\ \rho \mathbf{u} \boldsymbol{E} + \mathbf{u} \dfrac{\boldsymbol{P}}{\gamma \boldsymbol{M}^2} \end{pmatrix} - \frac{\mu}{\mathrm{Re}} \begin{pmatrix} 0 \\ \boldsymbol{\tau} = \left(\nabla \mathbf{u} + \nabla^t \mathbf{u}\right) - \dfrac{2}{3} \nabla \cdot \mathbf{u} \\ \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\tau} + \dfrac{1}{(\gamma - 1) \mathrm{Pr}\, \boldsymbol{M}^2} \nabla \boldsymbol{T} \end{pmatrix}$$

Equations (2): Approximation volumes-finis

- Maillage structuré : Ω partitionné en blocs (cartésien)

$$\Omega = \bigcup_{k \in Z} V_k$$

$$V_k := \left\{ \underline{\xi} \,\middle|\, \underline{x}_{k_m} - \frac{1}{2}\delta \underline{x}_m \le \underline{\xi}_m \le \underline{x}_{k_m} + \frac{1}{2}\delta \underline{x}_m \right\}$$



$$\int_{t_0}^{t_1}\int_V \frac{\partial \underline{U}(\underline{\xi}, t)}{\partial t}\, d\underline{\xi}\, d\tau = -\int_{t_0}^{t_1}\int_V \nabla \cdot \underline{F}\left(\underline{U}(\tau,\underline{\xi}), \nabla \underline{U}(\tau,\underline{\xi})\right) d\underline{\xi}\, d\tau$$

Flux numérique : ($2p$ points)

$$\boxed{\overline{v}_k^{\,n+1} = \overline{v}_k^{\,n} - \sum_{m=1}^{D} \lambda_m \left(\overline{F}^{\,n}_{m,k+1/2} - \overline{F}^{\,n}_{m,k-1/2} \right) \quad ; \quad \text{avec } \lambda_m = \frac{\delta t}{\delta x_m}}$$

Approximation (3) : Schéma de base [OS7]

- Schéma d'ordre élevé à 1-pas (L-W) :
  [Daru & Tenaud 2001, 2004]
  - développement jusqu'à ordre de précision 7 (scalaire)
  - contrôle de la dissipation en <u>temps + espace</u>
  - Support (OS7) = 9 points
    ➔ *Plus compacte qu'une intégration multi-pas (R-K)*
  - CFL =1 ➔ *solution exacte retrouvée*

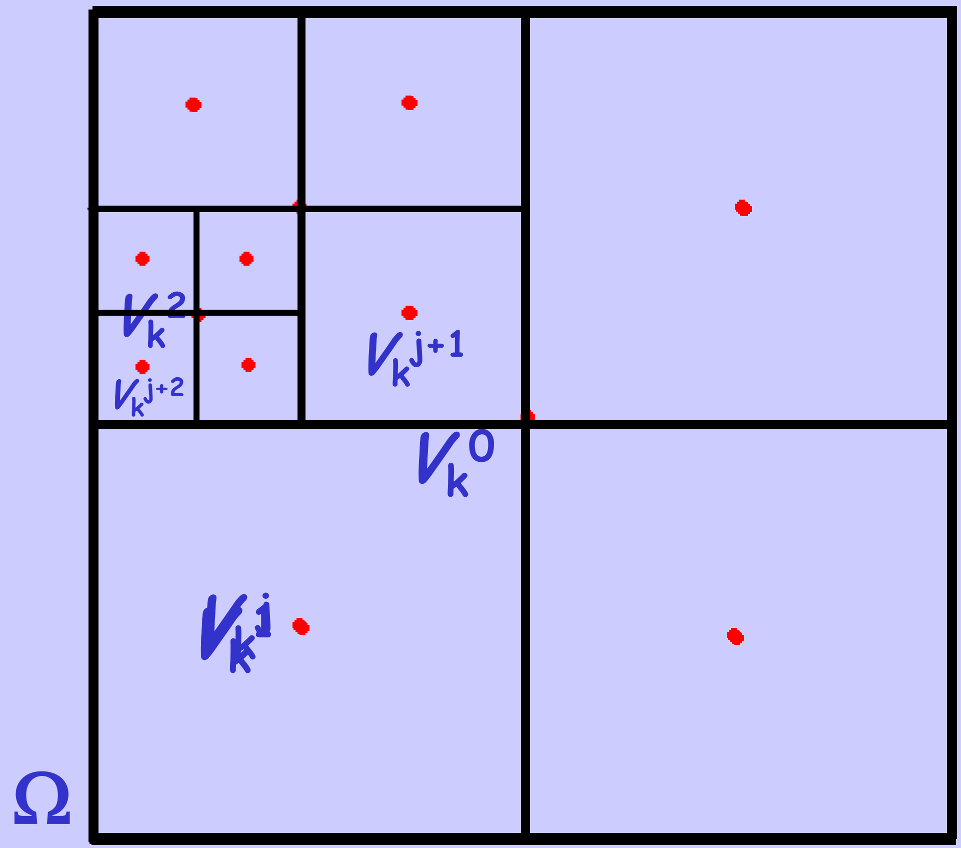
Décomposition multiéchelle (1) : Maillage

- Raffinement de maillage adaptatif :
- Maillages hiérarchiques (emboités) : dyadique

$$\Omega = \bigcup_{k \in \aleph} V_k^j$$

$$\text{niveau} : j \in [0, L]$$

$$V_k^j = \bigcup_{r \in M_{j,k}} V_r^{j+1} \; ; k \in \aleph$$



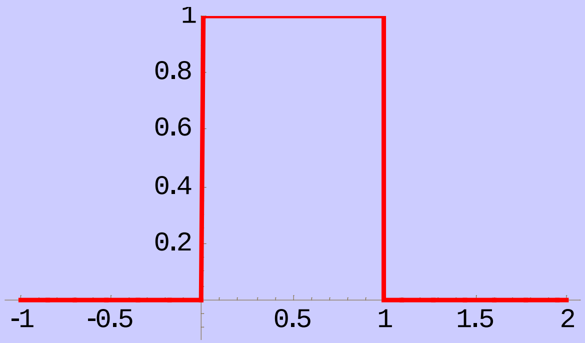
Décomposition multiéchelle (2) : Projection

- Projection : P_j^{j+1} progresser de j+1 ➔ j
- Moyenne de maille : $\bar{v}_k^n = \frac{1}{|V_k|}\int_{V_k} U\left(t^n, \underline{\xi}\right) d\,\underline{\xi}$

➔ Fonction d'échelle (duale) : sur chaque maille

$$\boxed{\tilde{\varphi}_{j,k}(x) = \frac{1}{\left|V_k^j\right|}\chi_{V_k^j}(x)}$$

$$\text{avec } \chi_{V_k^j}(x) = \begin{cases} 1. & \text{si } x \in V_k^j \\ 0. & \text{sinon} \end{cases}$$



$$\boxed{\bar{v}_{j,k} = \left\langle v, \tilde{\varphi}_{j,k} \right\rangle_\Omega = \sum_{i \in E} \frac{\left|V_{2k+i}^{j+1}\right|}{\left|V_k^j\right|}\bar{v}_{j+1,2k+i}}$$

Décomposition multiéchelle (3) : Projection

- Fonction d'échelle (duale) :

$$\boxed{\tilde{\varphi}_{j,k}(x) = \frac{1}{\left|V_k^j\right|}\chi_{V_k^j}(x)}$$

avec $\chi_{V_k^j}(x) = \begin{cases} 1. & \text{si } x \in V_k^j \\ 0. & \text{sinon} \end{cases}$

- Propriétés : $\left\|\tilde{\varphi}_{j,k}\right\|_{L_1(\Omega)} = 1. \quad ; \quad \tilde{\varphi}_{j,k} := 2^j \tilde{\varphi}\left(2^j \bullet - k\right)$

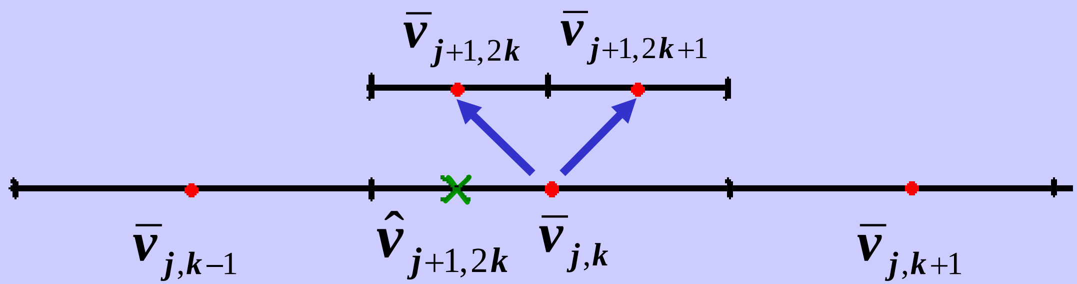
$$\bar{v}_{j,k} = \left\langle v, \tilde{\varphi}_{j,k} \right\rangle_\Omega = \sum_{i \in E} \frac{\left|V_{2k+i}^{j+1}\right|}{\left|V_k^j\right|} \bar{v}_{j+1,2k+i}$$

$$\boxed{\tilde{\varphi}_{j,k} = \sum_{i \in E} \frac{\left|V_{2k+i}^{j+1}\right|}{\left|V_k^j\right|} \tilde{\varphi}_{j+1,2k+i}}$$

Décomposition multiéchelle (4): Prédiction

- Prédiction : P_{j+1}^{j} progresser de j → j+1

→ détails



$$\boxed{\bar{v}_{j+1,2k} = \bar{v}_{j,k} + \bar{d}_{j,k} \quad ; \quad \bar{v}_{j+1,2k+1} = \bar{v}_{j,k} - \bar{d}_{j,k}}$$

<u>Contraintes</u> : la prédiction doit être

- locale
- consistante avec projection (conservativité) :

$$P_j^{j+1} \circ P_{j+1}^{j} = Id.$$

- linéaire (pas nécessaire, mais simplifie l'analyse numérique)

Décomposition multiéchelle (5): Ondelettes

Détail : $\boxed{\bar{d}_{j,k} = \bar{v}_{j+1,2k} - \hat{v}_{j+1,2k}}$ ➔ erreur de prédiction

$$\boxed{\hat{v}_{j+1,2k} = \bar{v}_{j,k} + \sum_{l=1}^{s} \gamma_l^s \left(\bar{v}_{j,k+l} - \bar{v}_{j,k-l}\right) = \sum_{l=-s}^{s} c_{j,l}^s \, \bar{v}_{j,k+l}}$$

$$\boxed{\bar{v}_{j,k} = \left\langle v, \tilde{\varphi}_{j,k} \right\rangle_\Omega}$$

$$\boxed{\bar{d}_{j,k} = \left\langle v, \tilde{\psi}_{j,k} \right\rangle_\Omega = \left\langle v, \tilde{\varphi}_{j+1,2k} \right\rangle_\Omega - \sum_{l=-s}^{s} c_{j,l}^s \left\langle v, \tilde{\varphi}_{j,k+l} \right\rangle_\Omega}$$

Ondelette duale : $\boxed{\tilde{\psi}_{j,k} := \tilde{\varphi}_{j+1,2k} - \sum_{l=-s}^{s} c_{j,l}^s \, \tilde{\varphi}_{j,k+l}}$

avec : $\tilde{\psi}_{j,k} := 2^j \tilde{\psi}\left(2^j \bullet - k\right) \quad ; \quad \left\| \tilde{\psi}_{j,k} \right\|_{L_1(\Omega)} < C, \forall j$ $\quad \boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \xi^m \, \tilde{\psi}(\xi) \, d\xi = 0.}$

Multirésolution adaptative (1): Compression

Décomposition multiéchelle :

$$M : \left(\bar{v}_{L,k}, k \in \left[0, 2^L - 1\right]\right) \rightarrow \left(\bar{v}_{0,0}, d_{j,k}, j \in \left[0, L-1\right], k \in \left[0, 2^j - 1\right]\right)$$

$$\begin{tikzcd}
\bar{v}_L \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[dr, leftrightarrow] & \bar{v}_{L-1} \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[dr, leftrightarrow] & \bar{v}_{L-2} \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[dr, leftrightarrow] & \dots \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[dr, leftrightarrow] & \bar{v}_1 \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[dr, leftrightarrow] & \bar{v}_0 \\
 & d_{L-1} & d_{L-2} & \dots & d_1 & d_0
\end{tikzcd}$$

Précision polynômiale : $\boxed{\left|d_{j,k}\right| \leq C\, 2^{-j} \left\|v'\right\|_{L_\infty\left(V_k^j\right)}}$

- Si v différentiable sur V_k^j ➔ décroissance en 2^{-j}
- Si discontinuités ➔ $d_{j,k}$ pointe les singularités

$d_{j,k}$ gère compression en contrôlant perte de précision

Multirésolution adaptative (2): Compression

Seuillage : niveaux de seuillage $(\varepsilon_j),\ j \in [0, L]$

Opérateur (non-linéaire) : $\mathcal{T}_\Lambda(d_{j,k}) = \begin{cases} 0. & \text{si} \quad d_{j,k} < \varepsilon_j \\ d_{j,k} & \text{sinon} \end{cases}$

Ensemble seuillé : $\Lambda_\varepsilon := \{(j,k)\ t.q.\ |d_{j,k}| \geq \varepsilon_j\}$

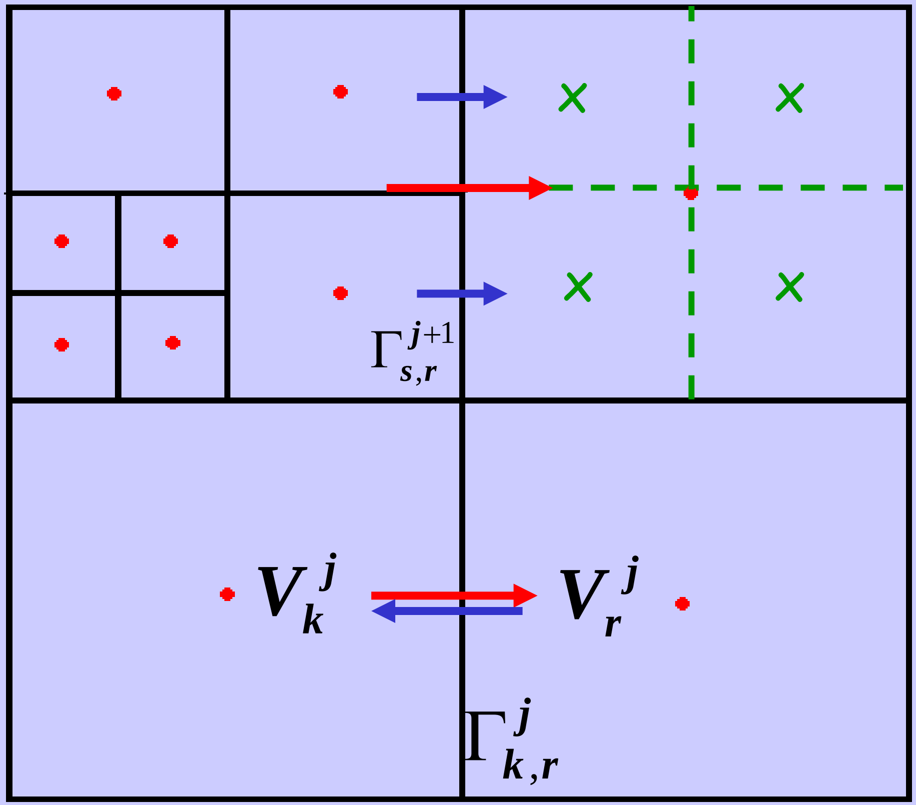
Contrôle de l'effet de seuillage :

Harten (1994) ➔ seuillage ordre ε : $\boxed{\varepsilon_j = 2^{D(j-L)}\varepsilon}$

Croissance de l'arbre : $\bar{d}_{j,k} > \varepsilon_j$ et $\bar{d}_{j,k} > 2^{(2s-1)}\varepsilon_j$

Multirésolution adaptative (3) : Conservation

Conservation des flux aux interfaces



$$\boxed{F_{k,r}^{j} = \sum_{\Gamma_{s,r}^{j+1} \subset \Gamma_{k,f}^{j}} \frac{\left|\Gamma_{s,r}^{j+1}\right|}{\left|\Gamma_{k,r}^{j}\right|} F_{s,r}^{j+1}}$$

$$\boxed{F_{k,r}^{j} = -F_{r,k}^{j}}$$

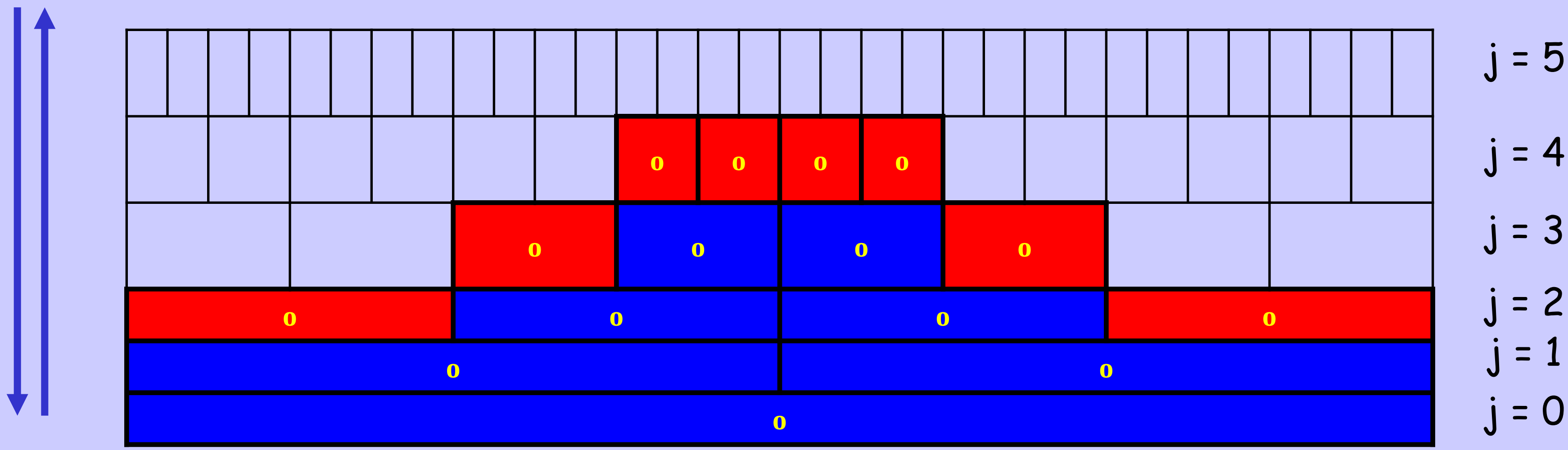
Multirésolution adaptative (4) : Procédure

Laboratoire d'Informatique pour la Mécanique et les Sciences de l'Ingénieur

- t_n - Solution $\bar{v}_k^n$ connue sur le niveau le plus fin
- 1 - Projection moyennes : $\bar{v}_{j,k} = \langle v, \tilde{\varphi}_{j,k} \rangle_\Omega = \sum_{i \in E} \frac{|V_{2k+i}^{j+1}|}{|V_k^j|} \bar{v}_{j+1,2k+i}$
- 2 - Prédiction détails : $\hat{v}_{j+1,2k} = \bar{v}_{j,k} + \sum_{l=1}^{s} \gamma_l^s \left(\bar{v}_{j,k+l} - \bar{v}_{j,k-l} \right)$

j : 1- 5 → 2 → 0

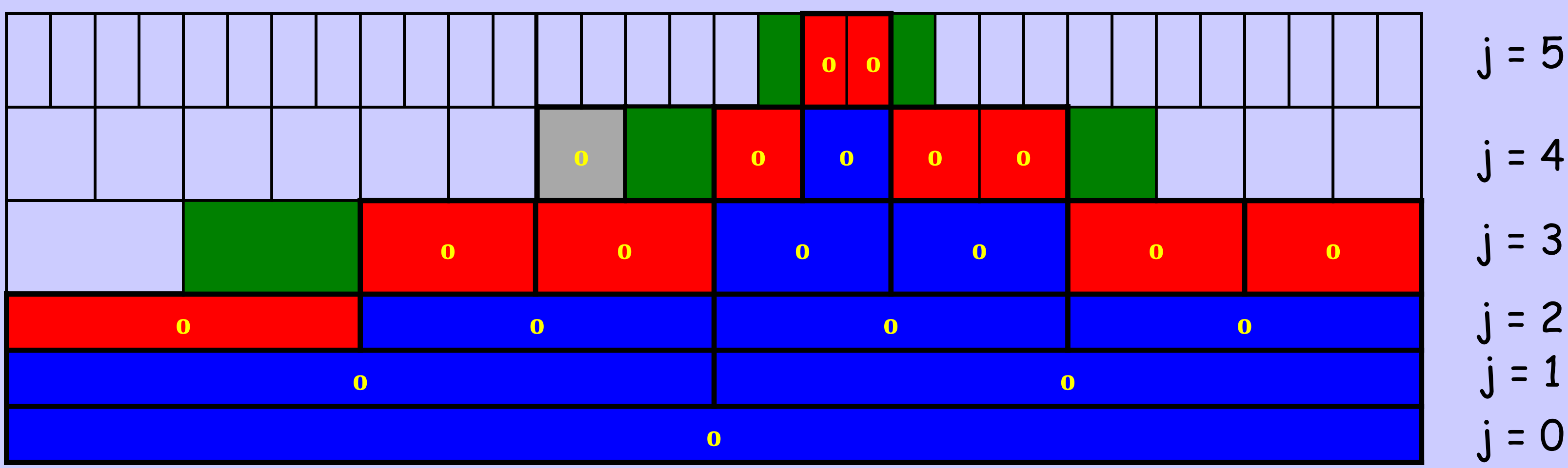
$$\bar{d}_{j,k} = \bar{v}_{j+1,2k} - \hat{v}_{j+1,2k}$$



Multirésolution adaptative (5) : Procédure

Laboratoire d'Informatique pour la Mécanique et les Sciences de l'Ingénieur

- **3 - Seuillage :** $\bar{d}_{j,k} \leq \varepsilon_j$
- **4 - Croissance de l'arbre :** $\bar{d}_{j,k} > \varepsilon_j$ et $\bar{d}_{j,k} > 2^{(2s-1)}\varepsilon_j$
- **5 - Arbre → gradualité : support de prédiction**
- **6 - Feuilles et feuilles fictives → conservation**

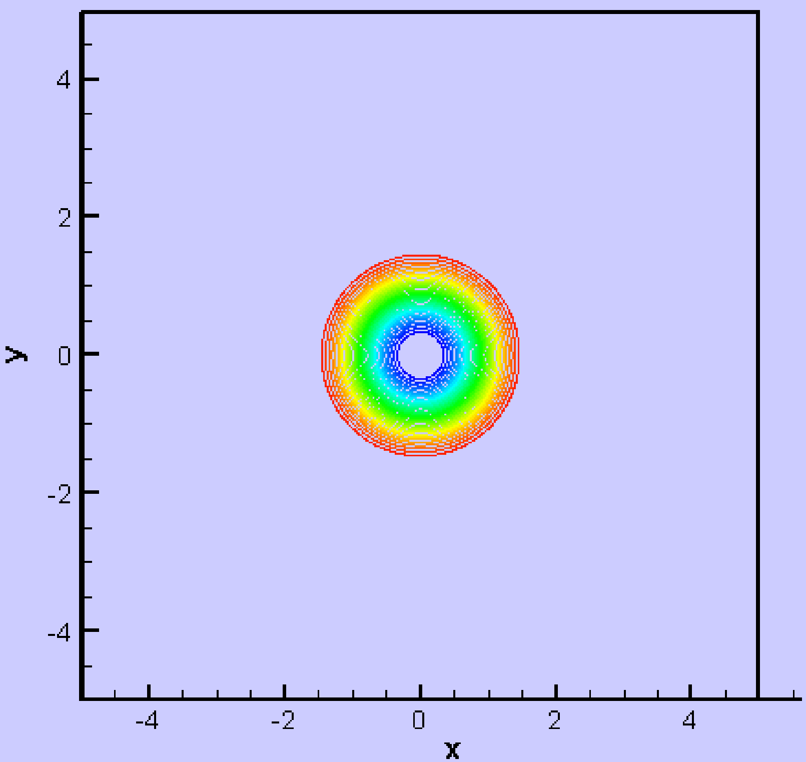


Cas-Test Euler 2D : Advection d'un tourbillon

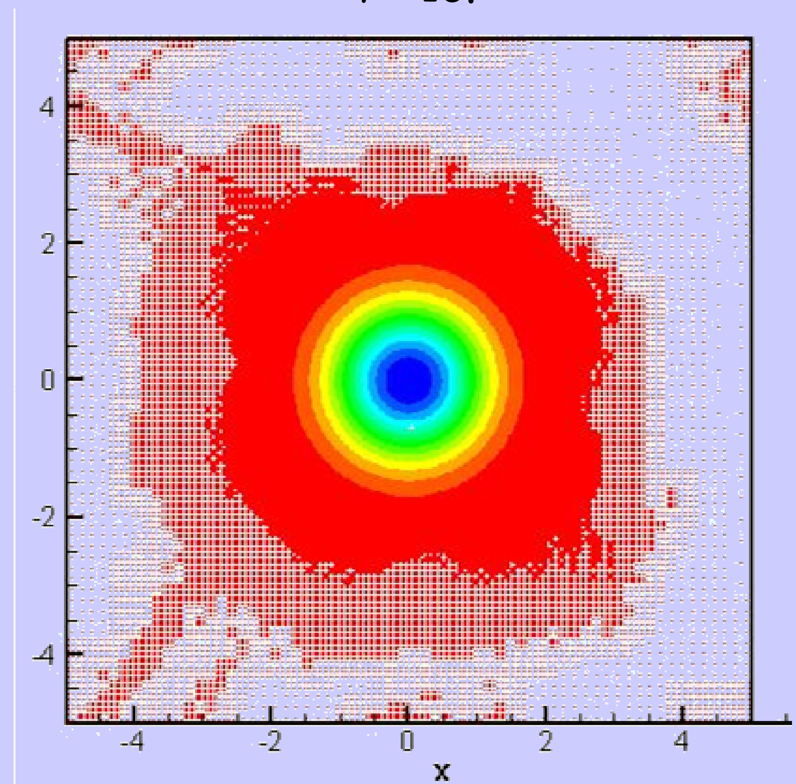
Laboratoire d'Informatique pour la Mécanique et les Sciences de l'Ingénieur

Propagation à 45° et à nombre de Mach supersonique d'un tourbillon de forte intensité (non visqueux)

t = 1.

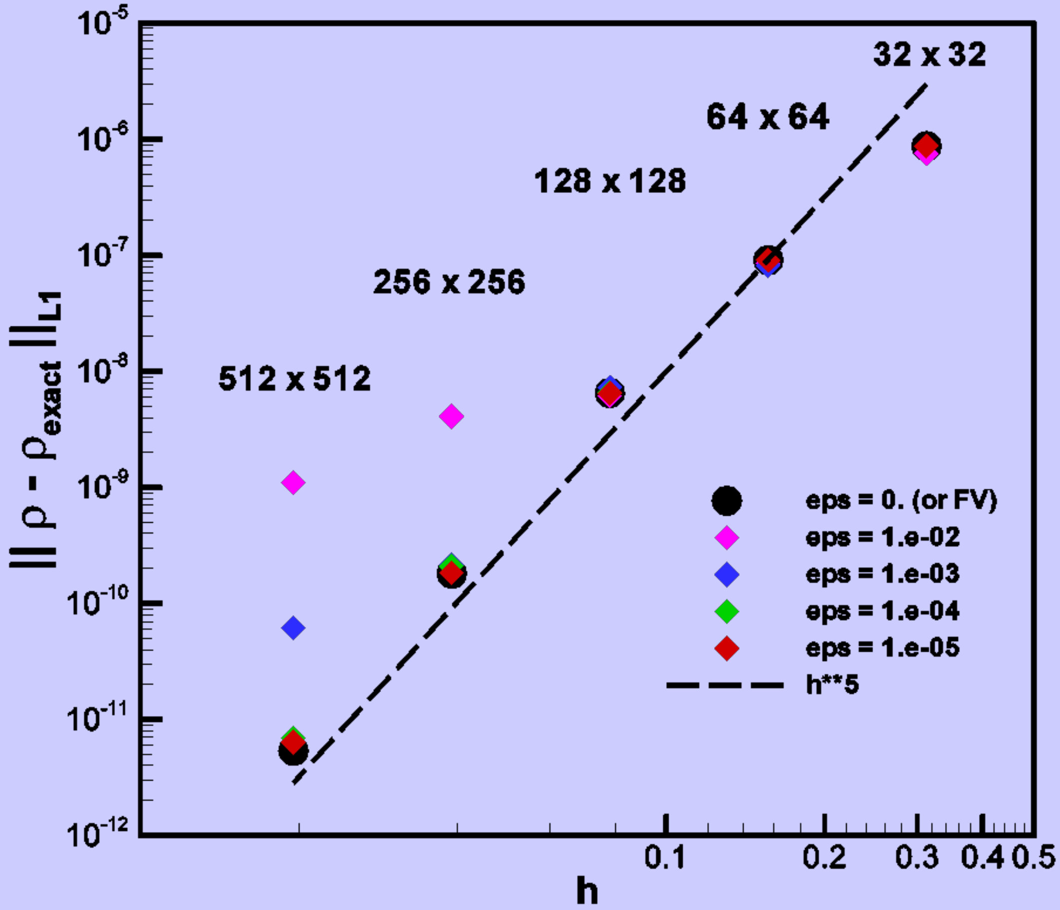


t = 10.



Cas-Test Euler 2D : Advection d'un tourbillon

Erreur / Solution exacte

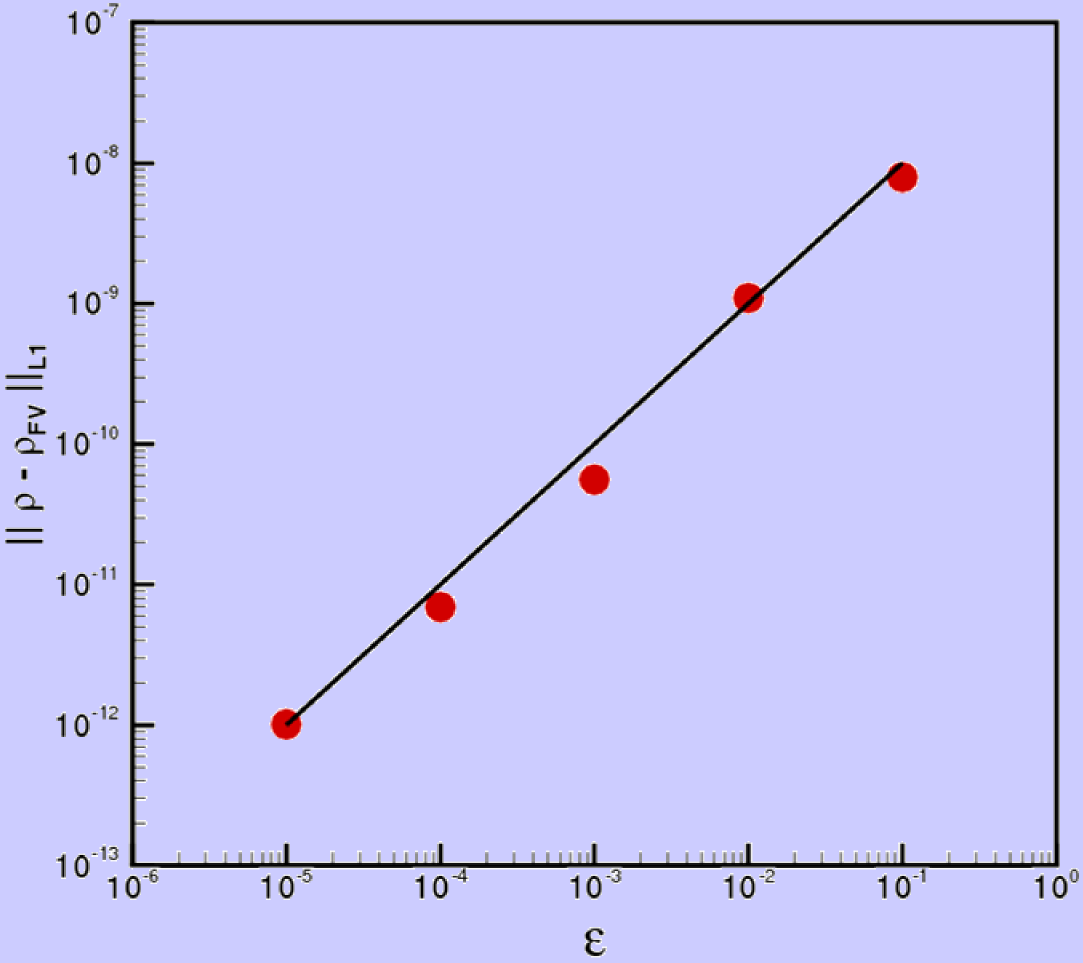


- CPU(ε=0) = 2. *x* CPU(FV)
- Compression mémoire $\forall\ \varepsilon$
  - $\varepsilon > 10^{-3}$: 50 % (FV)
  - $\varepsilon > 10^{-2}$: 35 % (FV)
- $\varepsilon > 10^{-3}$
  - ➔ Gains CPU si 50 % mém(FV)
  - ➔ maillages fins

Cas-Test Euler 2D : Advection d'un tourbillon

Laboratoire d'Informatique pour la Mécanique et les Sciences de l'Ingénieur

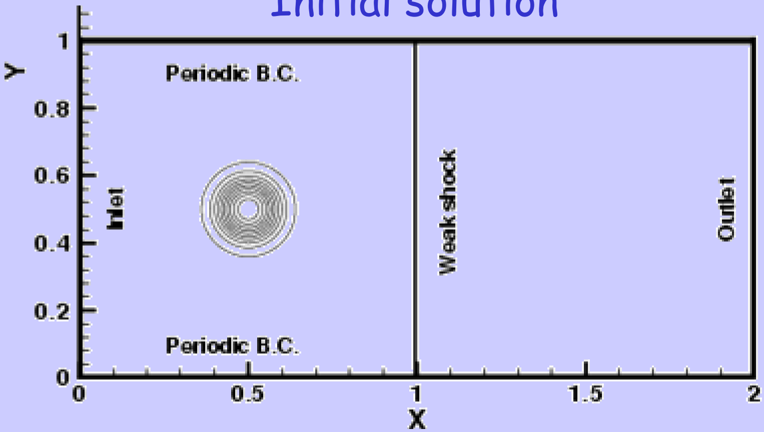
Erreur d'Approximation Multirésolution : *t = 10.*

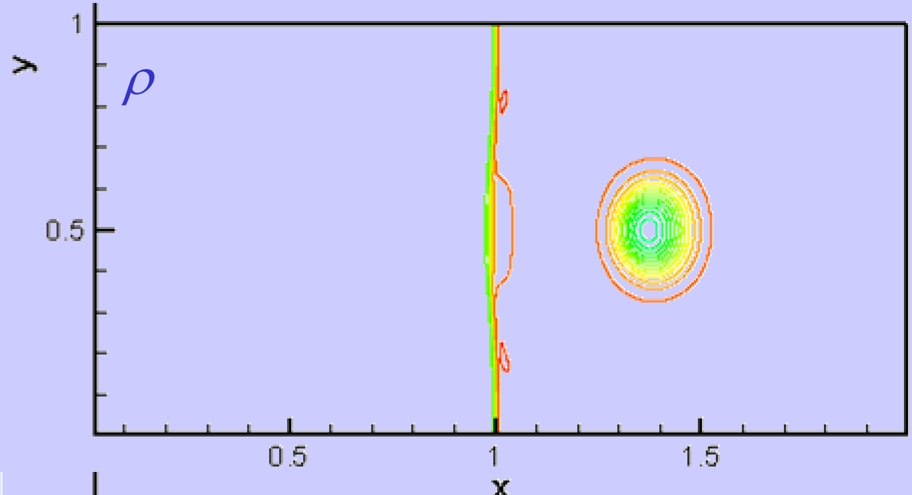


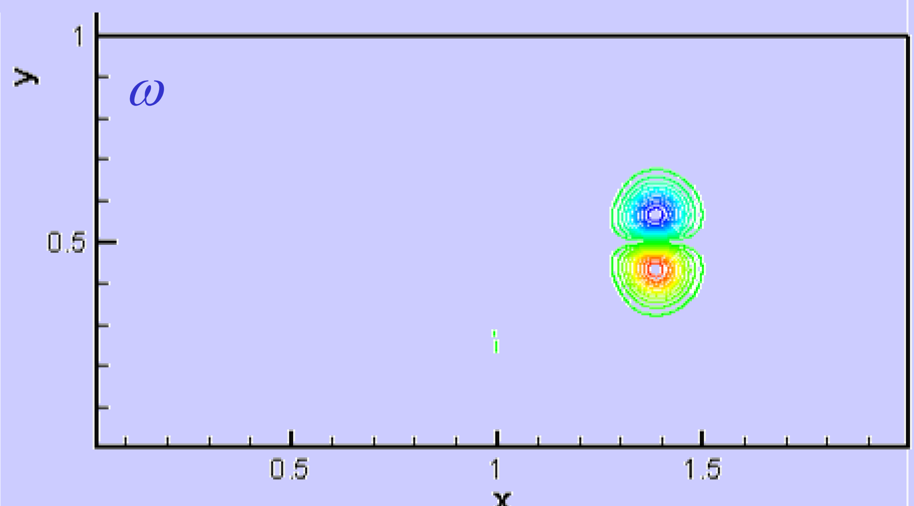
Cas-Test N-S 2D : Choc / spot T

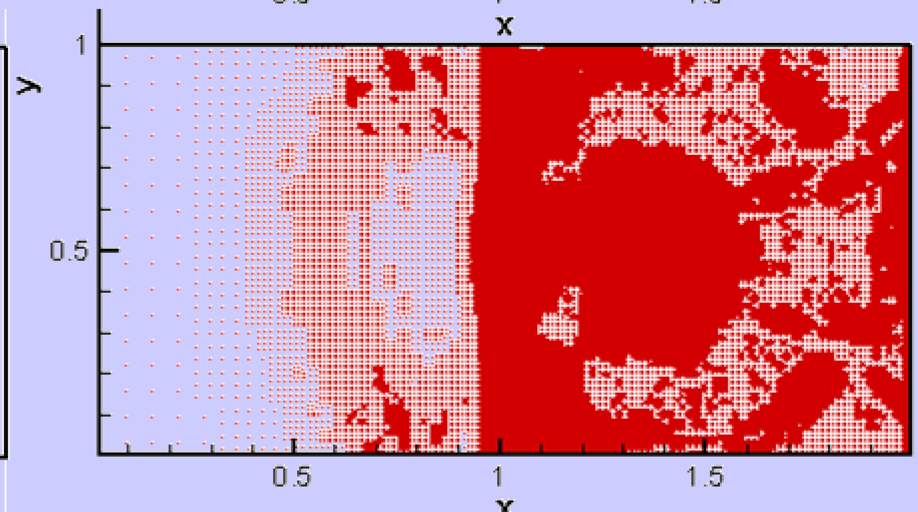
$M_0 = 1.1588$; $Re = 2000.$; $Pr = 0.7$; $\gamma = 1.4$; $(x \times y) \in [0,2] \times [0,2]$

Initial solution





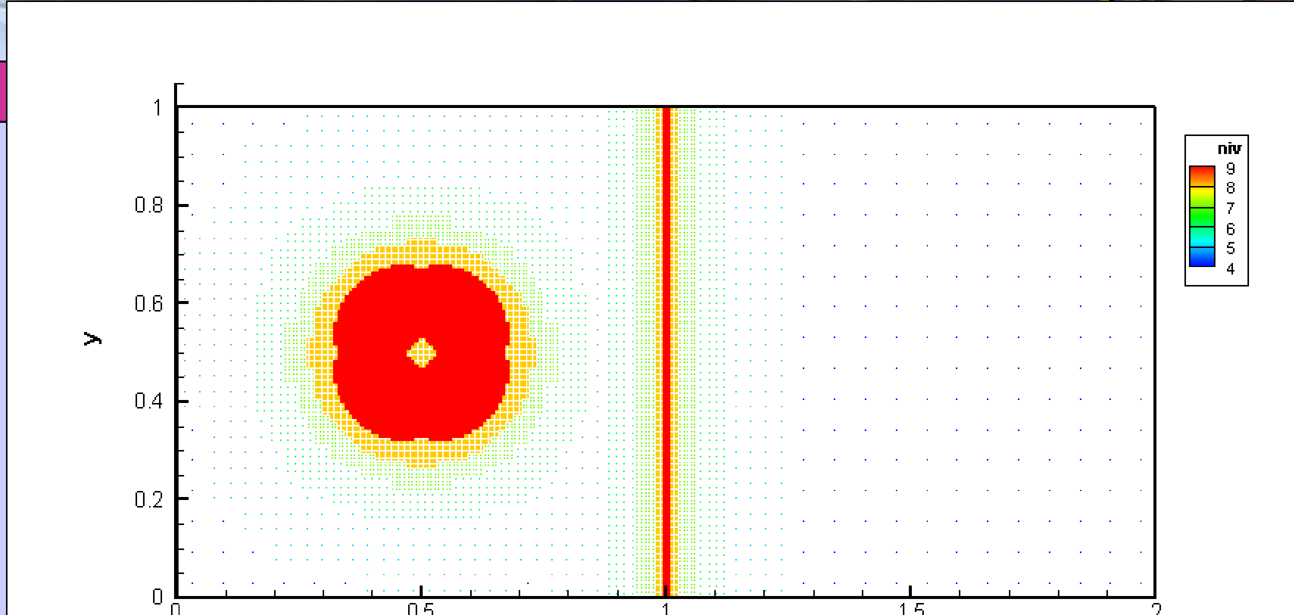




Cas-Test N-S 2D : Choc / spot T

maillage

21 %



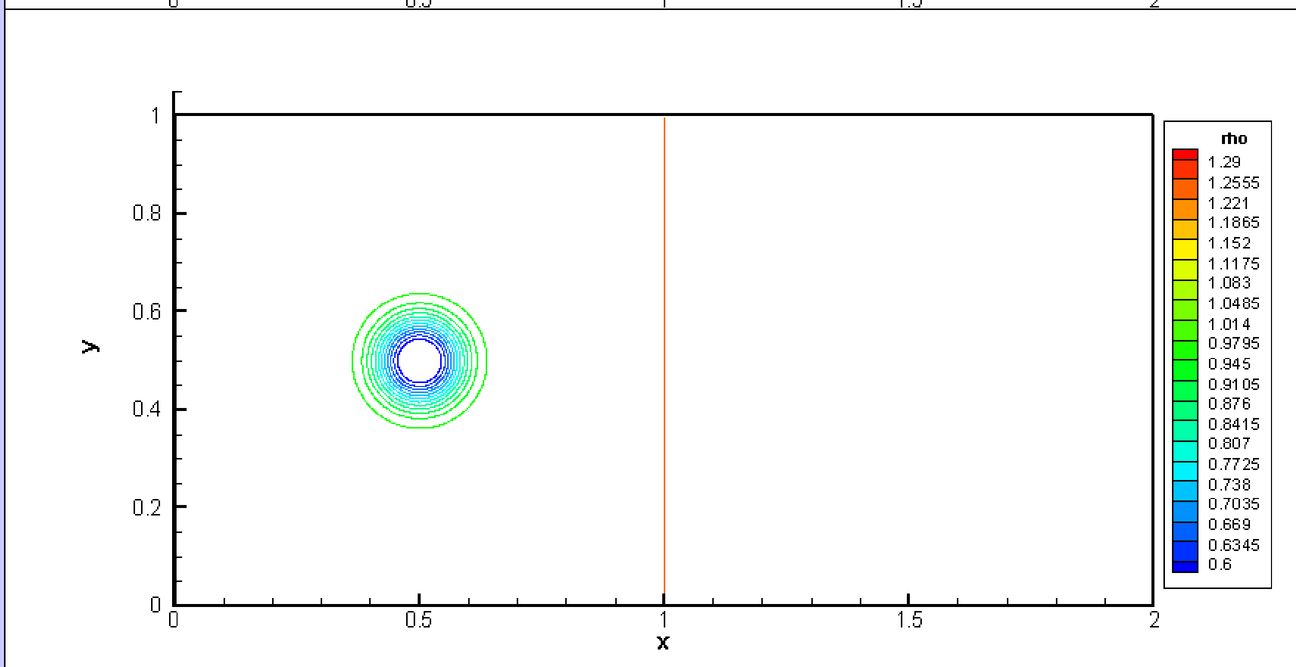
Niv = 9

$\varepsilon = 10^{-3}$

densité

t_{CPU}

36 %



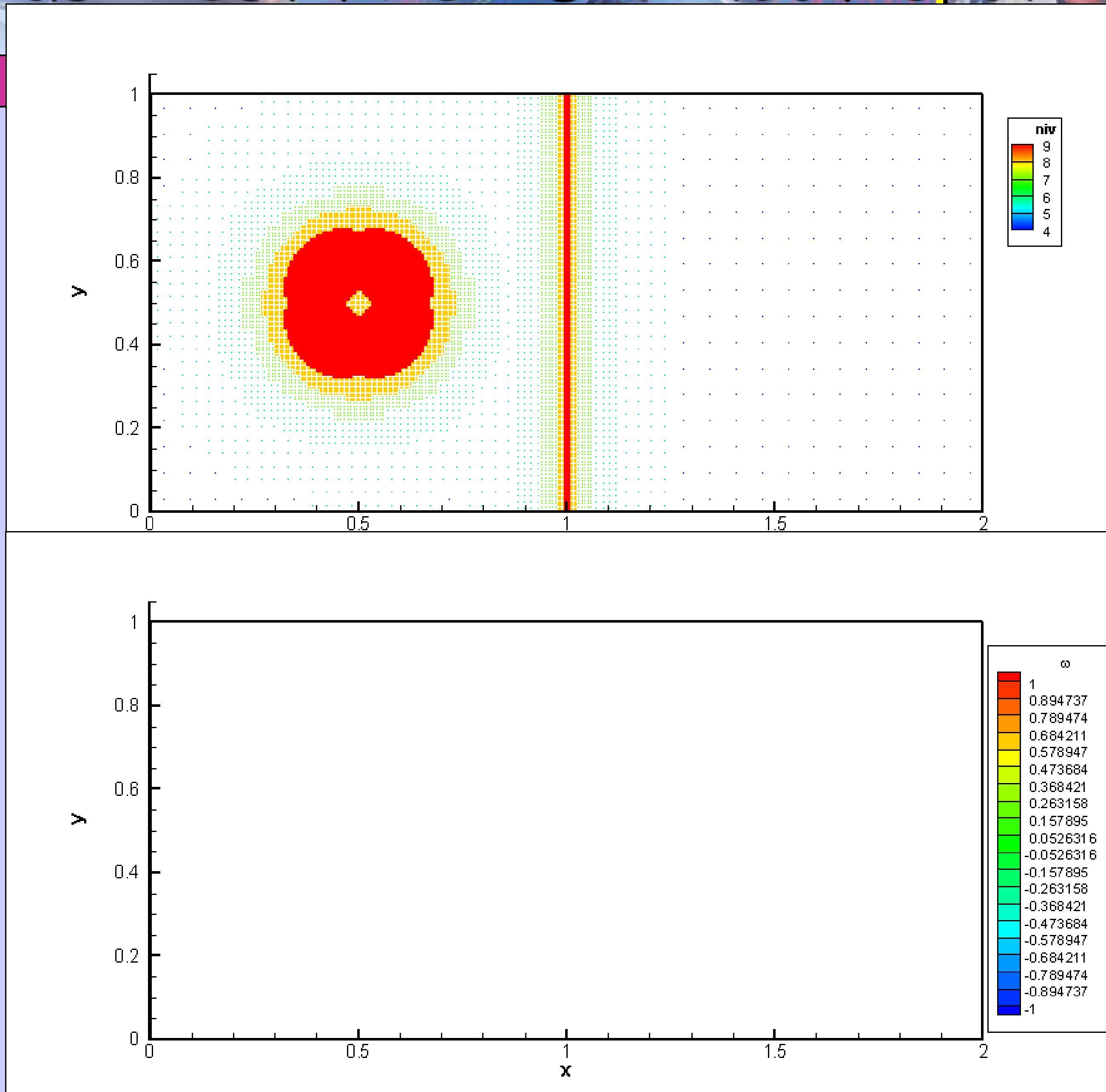
Cas-Test N-S 2D : Choc / spot T

maillage

Niv = 9

$\varepsilon = 10^{-3}$

vorticité



21 %

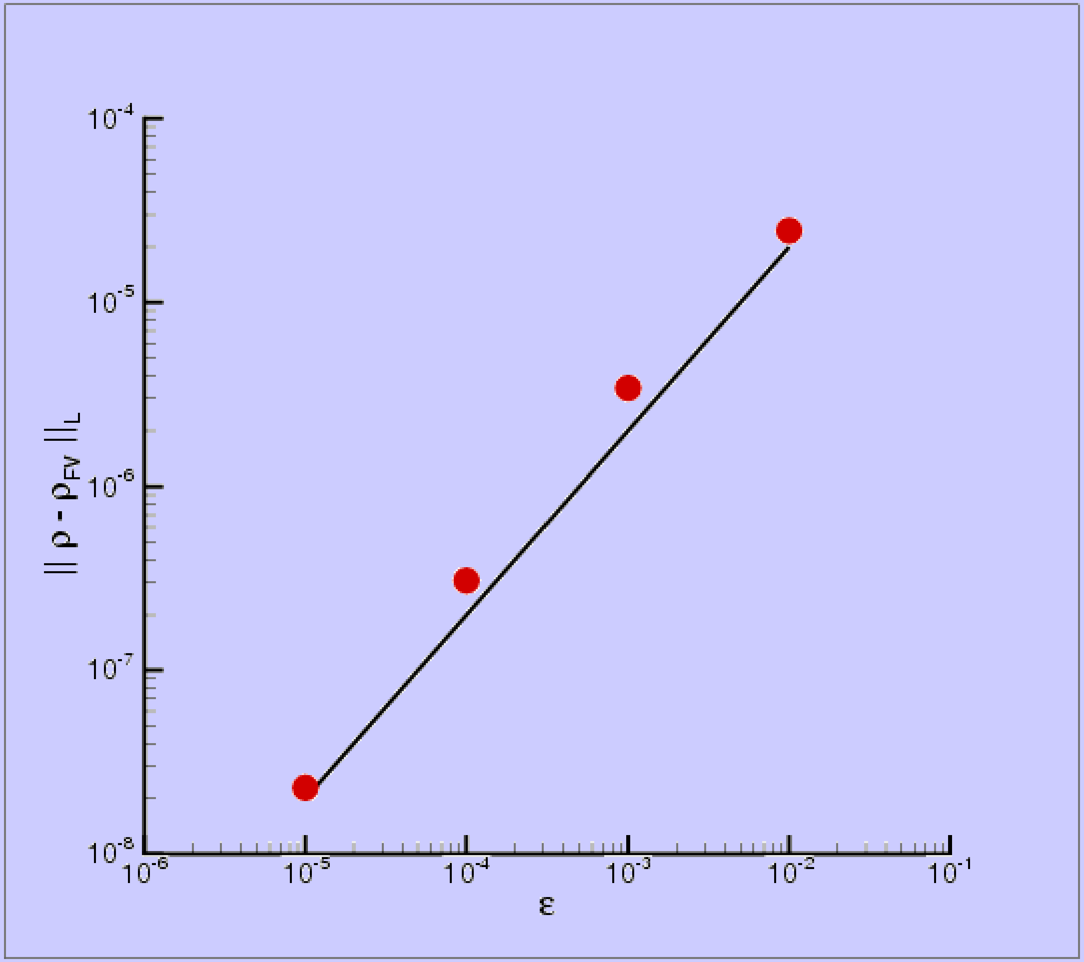
t_{CPU}

36 %

Cas-Test N-S 2D : Choc / spot T

Laboratoire d'Informatique pour la Mécanique et les Sciences de l'Ingénieur

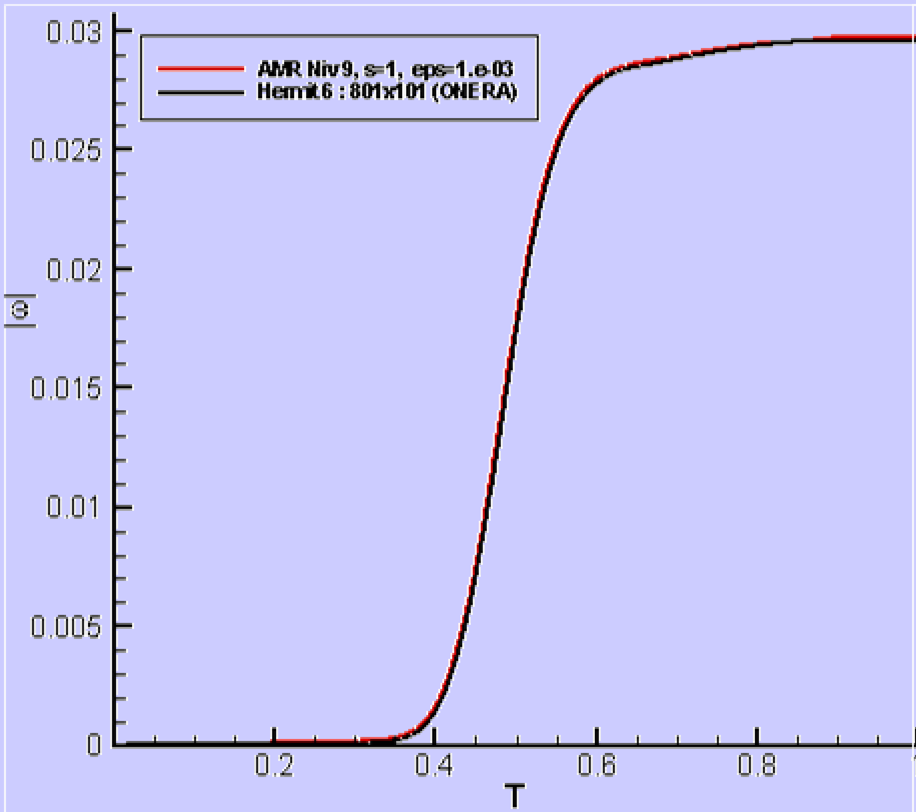
Erreur d'Approximation Multirésolution : *t = 1.*

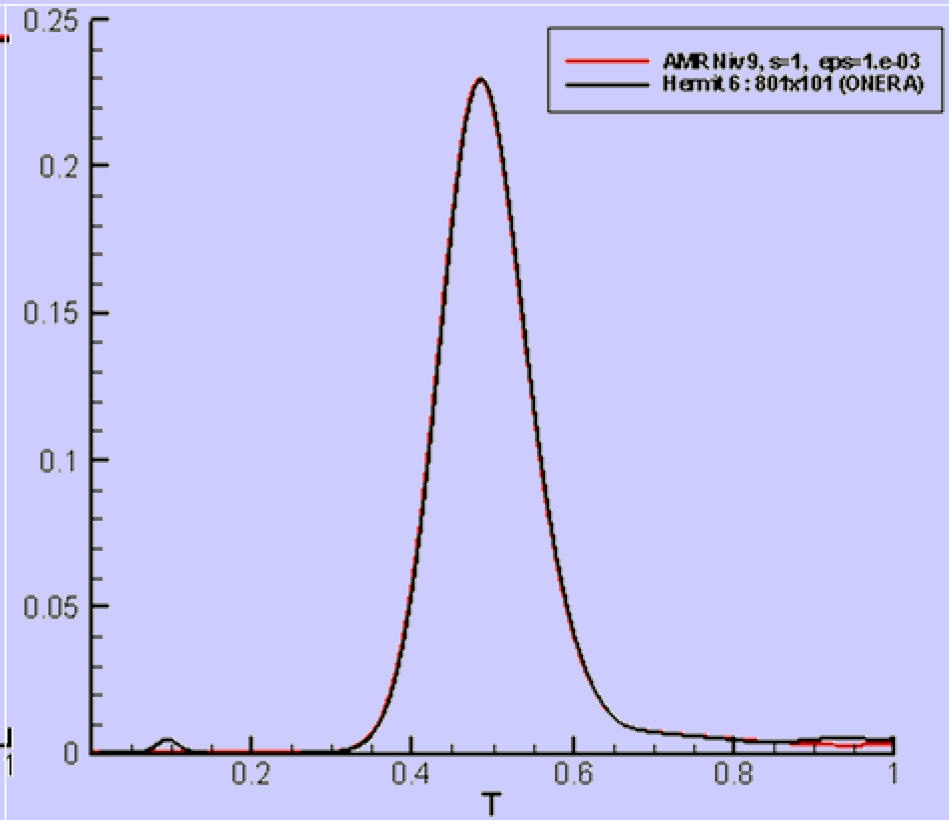


Cas-Test N-S 2D : Choc / spot T

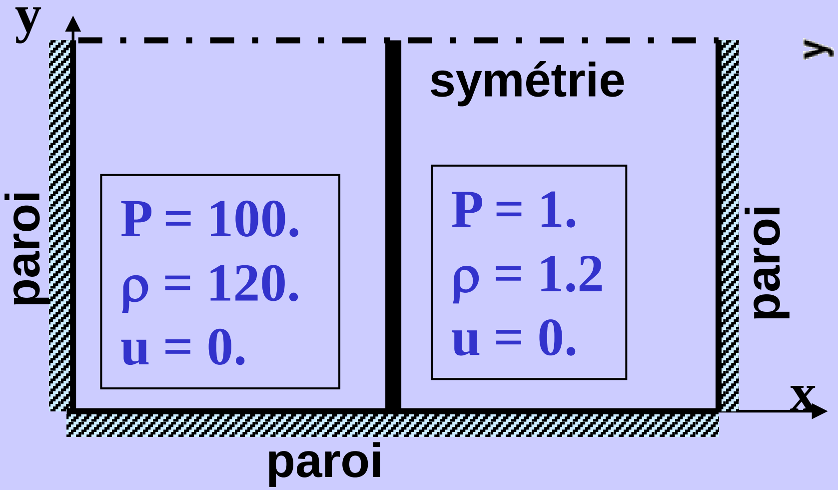
$$\int_\Omega |\omega| \, d\underline{x}$$

$$\int_\Omega \frac{|\nabla \boldsymbol{p} \times \nabla \rho|}{\rho^2} \, d\underline{x}$$



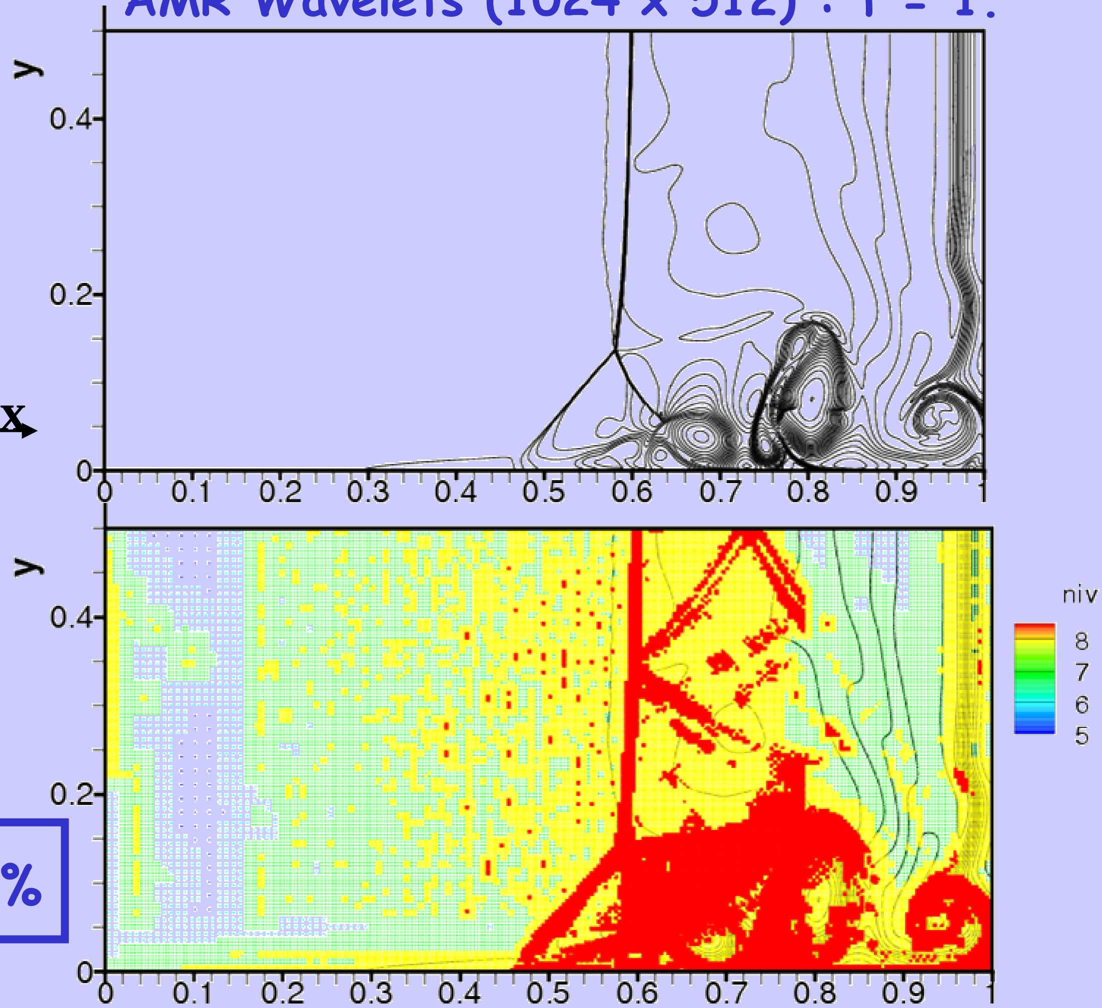


Cas-Test N-S 2D : Tube à choc (*Re=200*)



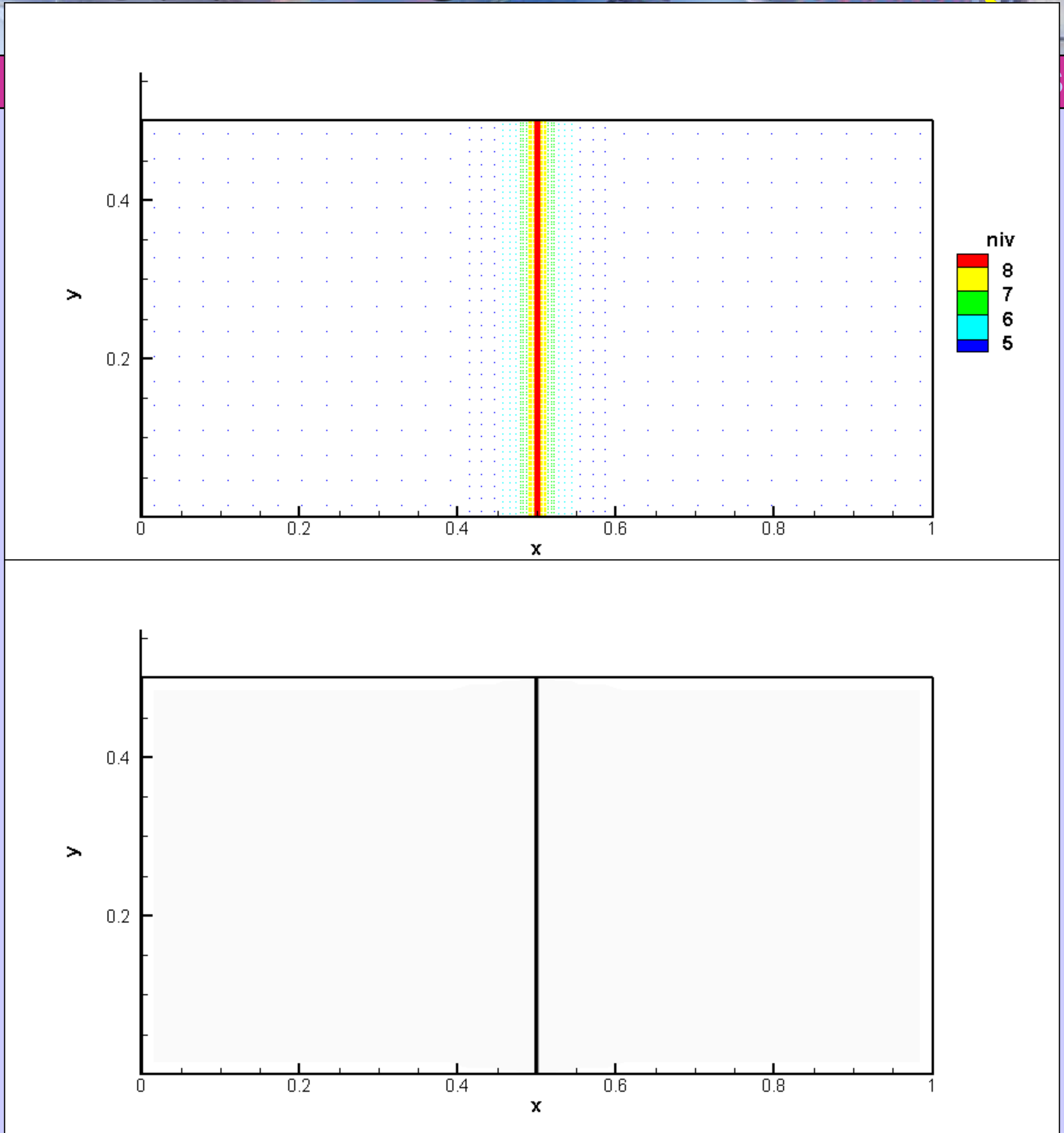
$L_x = 1$; $L_y = 0.5$

AMR Wavelets (1024 x 512) : t = 1.



$\varepsilon=10^{-2}$ ➔ Compression = 70 %

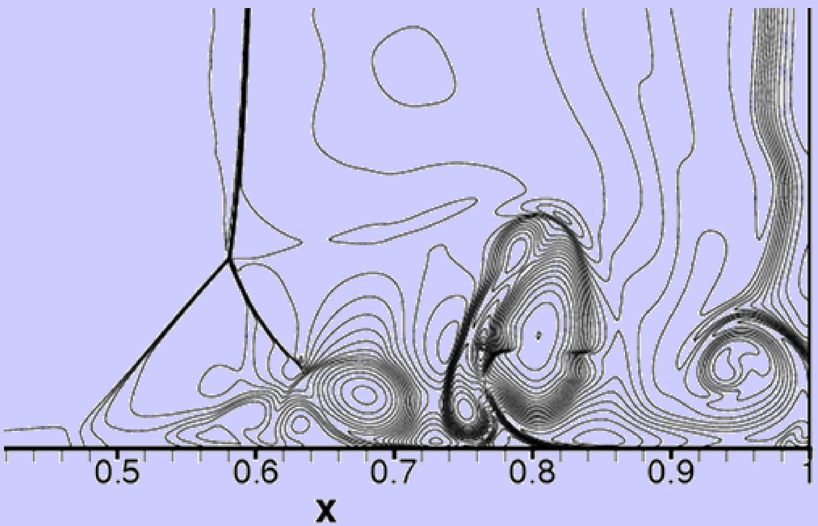
Cas-Test N-S 2D : Tube à choc (*Re=200*)



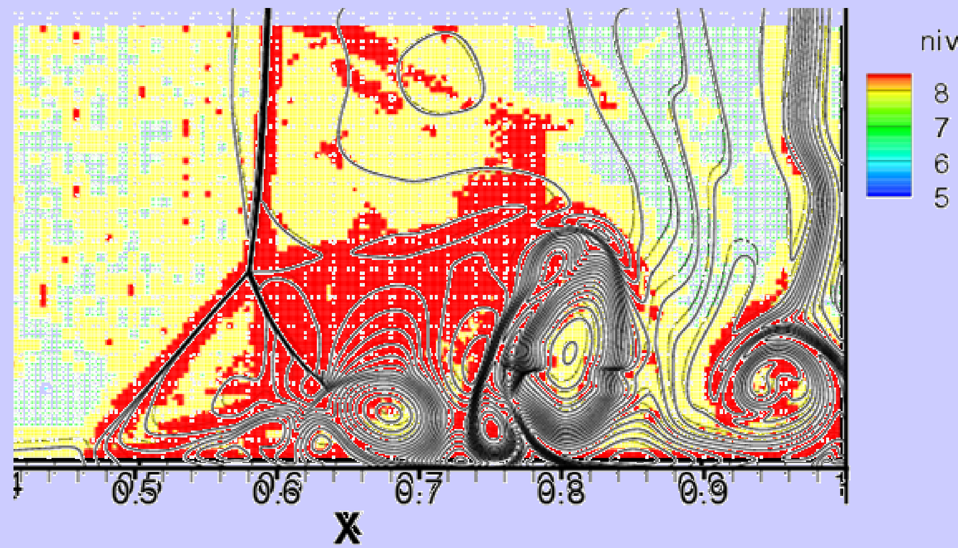
Cas-Test N-S 2D : Tube à choc (*Re=200*)

Tube à Choc : Re = 200 ; T = 1.

AMR Wavelets (1024 x 512)

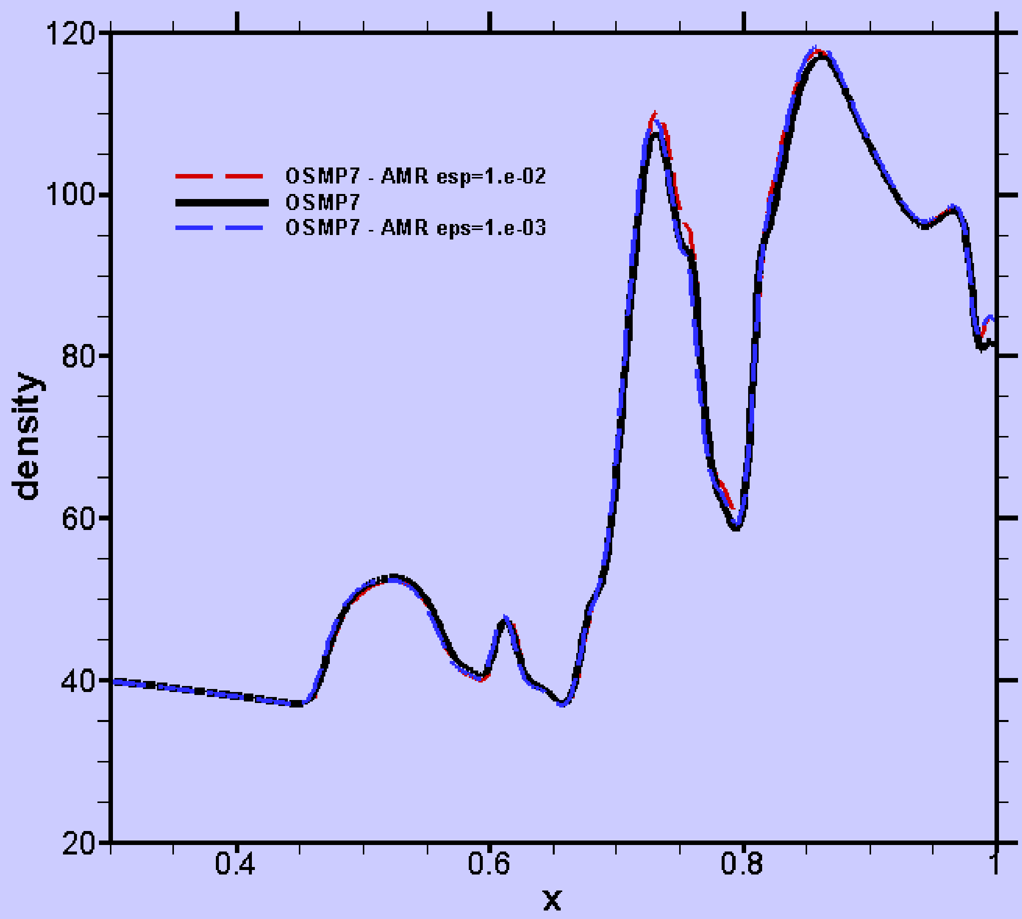


Référence : FV OSMP7 (1000 x 500)



Compression :
- Mémoire = 35 %
- CPU = 80 %

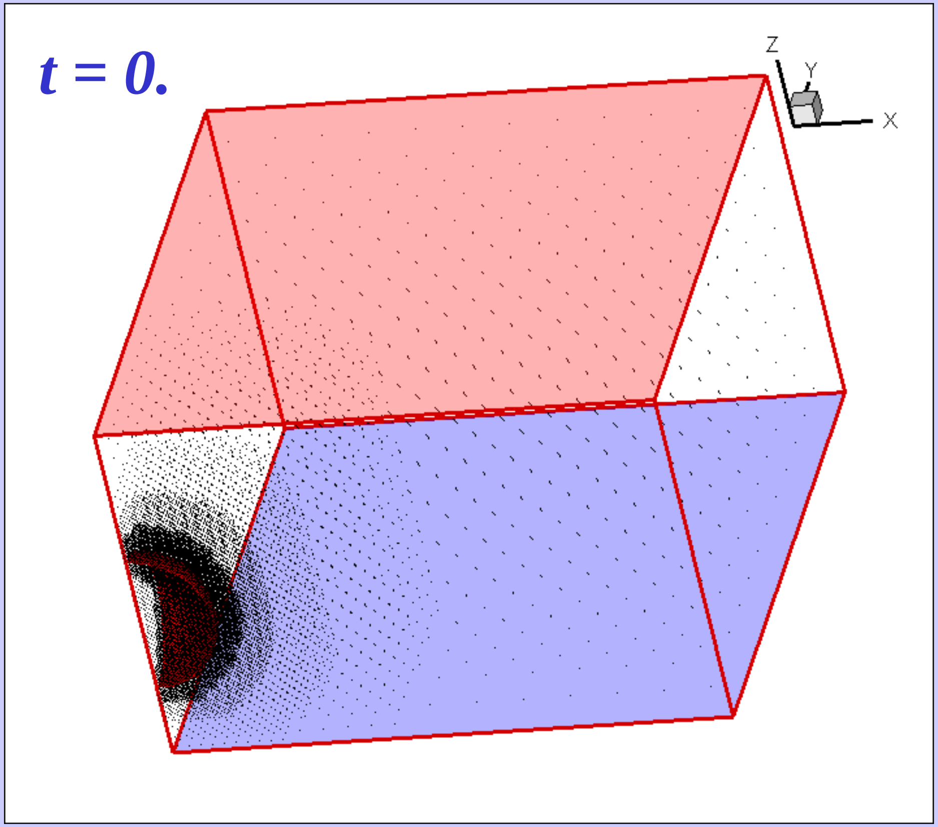
Cas-Test N-S 2D : Tube à choc (*Re=200*)



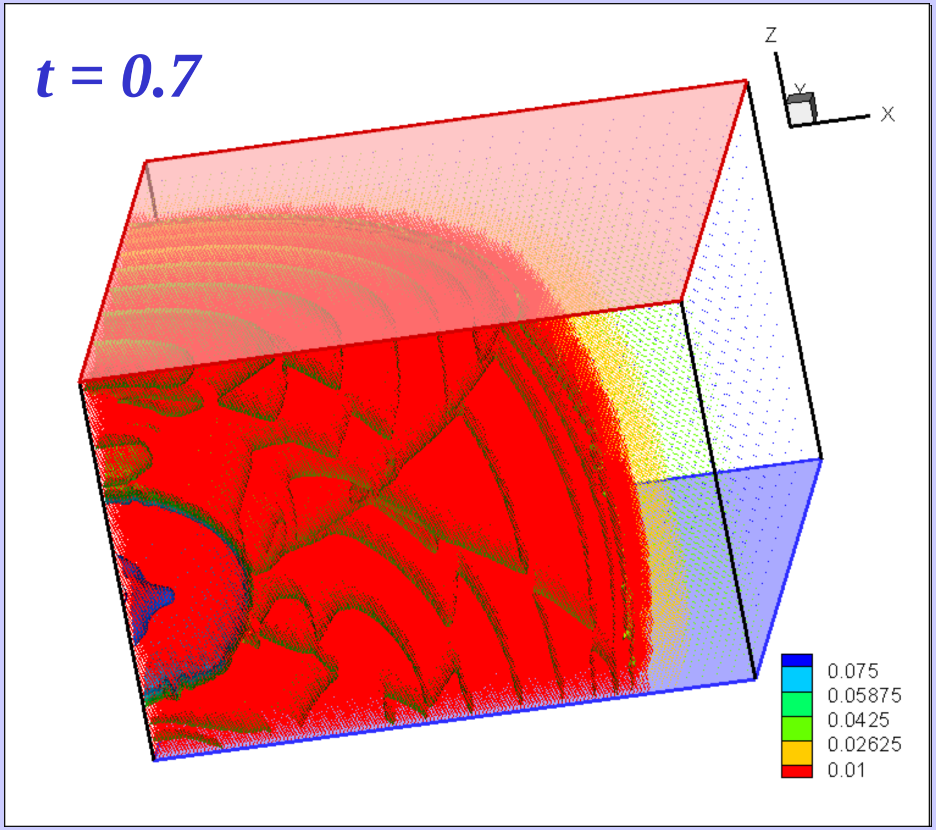
Cas-Test Euler 3D : Tube à choc

Laboratoire d'Informatique pour la Mécanique et les Sciences de l'Ingénieur

AMR $\varepsilon = 10^{-3}$ (160 x 160 x 96) : $t_{CPU} = 6.5\ 10^{-6}$; rapport t_{CPU} # 0,7



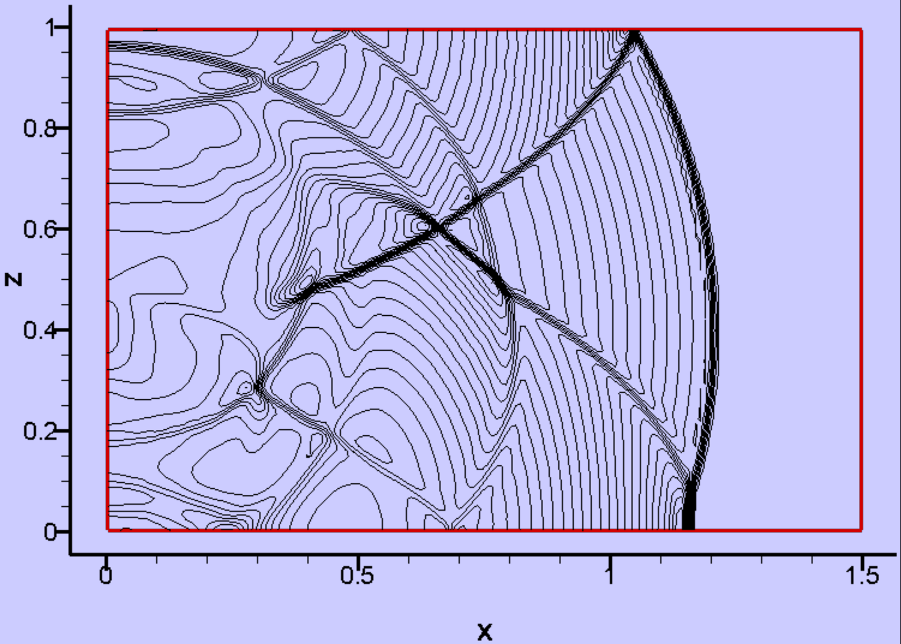
$N_{points} < 1\ \%\ N_{Tot}$



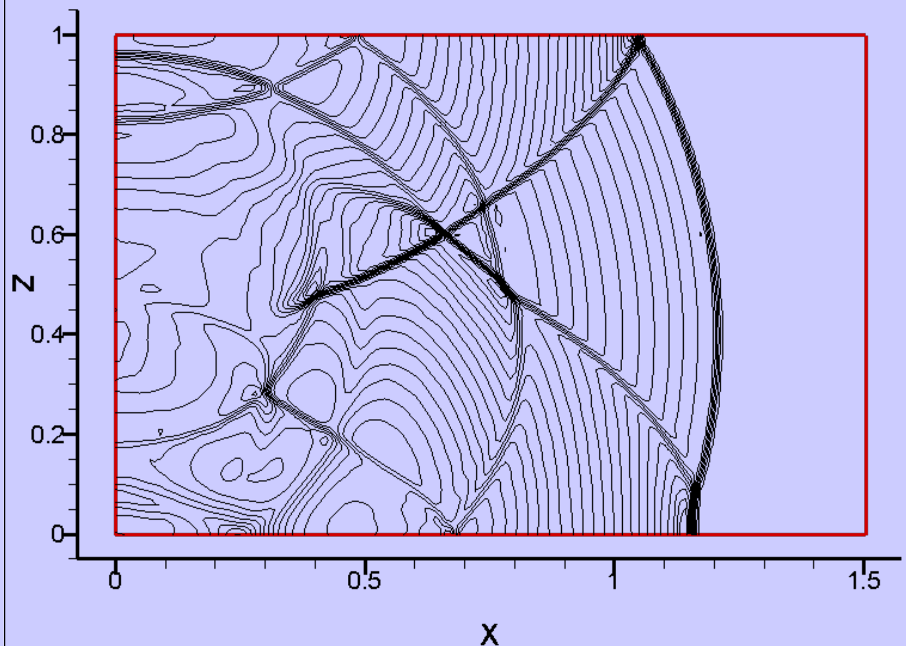
$N_{points} \sim 50\ \%\ N_{Tot}$

Cas-Test Euler 3D : Tube à choc

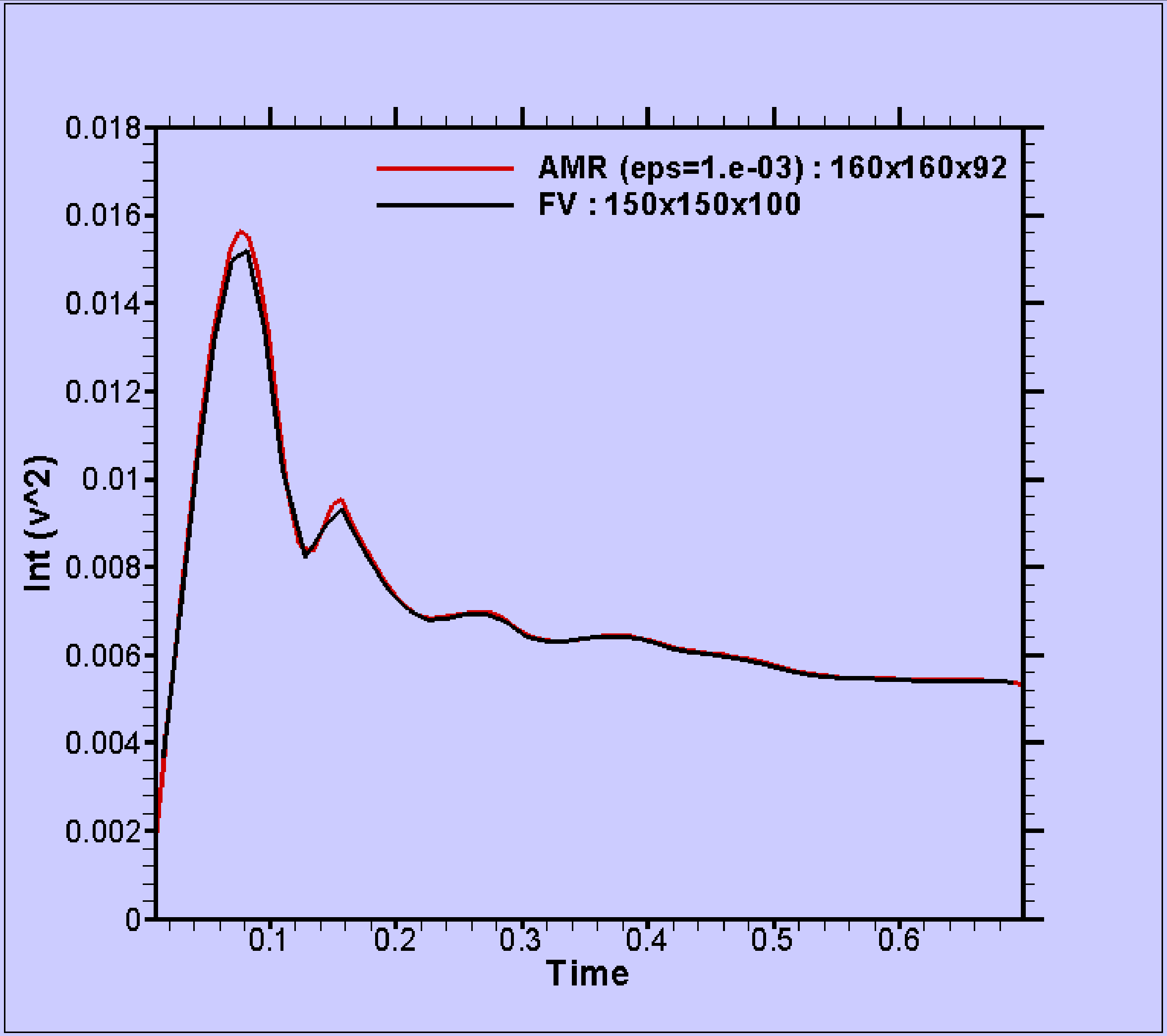
AMR : $\varepsilon = 10^{-3}$ (160 x 160 x 96)



FV OSMP7 (150 x 150 x 100)



Cas-Test Euler 3D : Tube à choc



Conclusions et Perspectives

AMR :

- Décomposition multi échelle : Formalisme & Concept attractifs
- Contrôle erreur d'approximation MR (perturbation)
- Performances si 50 % mémoire(FV)

  → maillages raffinés

  → gradients localisés

Perspectives :

- Résolution implicite → ne semble pas un point dur.
- Parallélisation → difficultés sauf peut-être par patch
- Conditions immergées → frontières non alignées / maillage
- Adaptation en temps → suivant niveau de raffinement
- Concept MRA → LES (?)