TP MPFI

Philippe Théveny, Nathalie Revol
École *Précision et Reproductibilité en Calcul Numérique*
Fréjus, jeudi 28 mai, 11h - 12h30

L'itération de la logistique est définie sur l'intervalle $[0, 1]$ par

$$\begin{cases} x_0 \in [0,1] \text{ donné}, \\ x_{n+1} = a x_n (1 - x_n). \end{cases}$$

Par la suite, on notera $f(x) = ax(1 - x)$.

La suite des itérés dépend de la valeur du paramètre a et de la condition initiale x_0, mais la limite ne dépend que du paramètre a. Pour a compris entre 0 et 4, les itérés restent dans l'intervalle $[0, 1]$.

Les comportements suivants sont connus.

– Pour a vérifiant $0 \leq a \leq 1$, la seule limite est 0.
– Pour a compris entre 1 et 3, une autre limite, qui est un attracteur, apparaît : elle vaut $\frac{a-1}{a}$ et le point 0 est un point fixe répulsif (ou instable).
– Pour a variant entre 3 et 3.5700, on observe des orbites périodiques avec des périodes qui sont des puissances de 2 ; mentionnons au pssage que le rapport entre les différences de deux valeurs successives de a pour lesquelles on a doublement de période tend vers la constante de Feigenbaum.

  On appelle *orbite périodique de période* p une séquence de p points α^0, α^1, $\ldots \alpha^{p-1}$ telle que si $x_0 = \alpha^0$, alors $x_1 = \alpha^1$, $\ldots x_{p-1} = \alpha^{p-1}$ puis $x_p = \alpha^0$ et les itérés successifs « bouchent » sur ces p points.

  Toutes les périodes qui sont des puissances de 2 se trouvent dans cette fenêtre de paramètres et les limites dépendent de la valeur de a ; en particulier, on a une période 2 pour $a \in [3, 1 + \sqrt{6}] \simeq [3, 3.44949]$ et on a une période 4 pour $a \in [3.44949, 3.54409]$.
– Pour a variant entre 3.5700 et 4, tous les comportements sont possibles : chaos ou comportement périodique avec toutes les périodes qui sont des entiers différents des puissances de 2.
– En particulier, pour a autour de 3.8284 (plus précisément, à partir de $1 + \sqrt{8}$), on a une période égale à 3. Il a été démontré que si une période égale à 3 existe, alors toutes les périodes entières existent, cf. T.Y. Li and J.A. Yorke : *Period Three Implies Chaos*, American Mathematical Monthly 82, pp. 985–992 (1975). .

1. Première partie : essai de différentes expressions pour f

Récupérez le fichier `logistic_ mpfi.c`. On vous propose d'utiliser trois expressions différentes pour f, la formule donnée ci-dessus, une forme factorisée pour réduire le problème de décorrélation des variables et la forme de Taylor à l'ordre 1 :

(a) dans la routine `logistic1`, implantez la forme $f(x) = ax(1 - x)$;

(b) dans la routine `logistic2`, implantez la forme factorisée $f(x) = -a(x-1/2)^2 + a/4$;

(c) la routine `logistic3` implante la forme de Taylor d'ordre 1 : $\boldsymbol{x}_{n+1} = \boldsymbol{f}(x_n) + (\boldsymbol{x}_n - x_n) * \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}_n)$, où $\boldsymbol{x}_n$ est l'intervalle et x_n est le milieu de $\boldsymbol{x}_n$. Dans notre exemple, $f(x) = ax(1-x)$, donc $f'(x) = a(1-2x)$ et par conséquent le nouvel itéré est donné par

$$\boldsymbol{x}_{n+1} = \boldsymbol{f}(x_n) + (\boldsymbol{x}_n - x_n) * \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}_n) = ax_n(1-x_n) + a(\boldsymbol{x}_n - x_n)(1-2\boldsymbol{x}_n).$$

Utilisez ces trois formes pour différents points de départ et pour différentes valeurs du paramètre a comprises entre 0 et 3. Qu'observez-vous ?
Que se passe-t-il lorsque l'on prend a dans la plage $[3, 3.5700]$?

2. Deuxième partie : détermination des points fixes par Newton

On rappelle l'algorithme de Newton par intervalles.
Input : $\boldsymbol{f}$, $\boldsymbol{f}'$, $\boldsymbol{x}_0$ // $\boldsymbol{x}_0$ initial search interval
Initialization : $\mathcal{L} = \{\boldsymbol{x}_0\}$, $\alpha = 0.75$ //any value in $]0.5, 1[$ is suitable
Loop : while $\mathcal{L} \neq \emptyset$
  Suppress $(\boldsymbol{x}, \mathcal{L})$
  $x := \text{mid}(\boldsymbol{x})$
  $(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) := \left(x - \frac{\boldsymbol{f}(\{x\})}{\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})}\right) \bigcap \boldsymbol{x}$ // $\boldsymbol{x}_1$ and $\boldsymbol{x}_2$ can be empty
  if $w(\boldsymbol{x}_1) > \alpha w(\boldsymbol{x})$ or $w(\boldsymbol{x}_2) > \alpha w(\boldsymbol{x})$ then $(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) := \text{bisect}(\boldsymbol{x})$
  if $\boldsymbol{x}_1 \neq \emptyset$ and $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_1) \ni 0$ then
    if $w(\boldsymbol{x}_1)/|\text{mid}(\boldsymbol{x}_1)| \leq \varepsilon_{\boldsymbol{x}}$ or $w(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_1)) \leq \varepsilon_Y$ then Insert $\boldsymbol{x}_1$ in Res
    else Insert $\boldsymbol{x}_1$ in $\mathcal{L}$
  same handling of $\boldsymbol{x}_2$
Output : *Res*, a list of intervals that may contain the roots.

Cet algorithme est disponible dans le fichier `newton.c`.

On va utiliser cet algorithme pour déterminer la limite de l'itération de la logistique, pour les valeurs de a comprises entre 1 et 3 (pour qu'il y ait un seul point limite différent de 0). Comme la limite x^* de l'itération de la logistique vérifie $x^* = f(x^*)$, autrement dit x^* est un point fixe de f, cette valeur x^* est un zéro de la fonction $f(x) - x$ et on peut donc utiliser la méthode de Newton pour la déterminer.

(a) Complétez le programme avec les codes des fonctions pour $\boldsymbol{f}(x)$, $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ et $\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})$. Expliquez pourquoi il faut utiliser l'extension intervalle pour $\boldsymbol{f}(x)$.

(b) Essayez le code pour différentes valeurs de a et pour différentes précisions. Retrouvez-vous les limites observées dans la première partie ?

3. Troisième partie : détermination des orbites périodiques de période 2, 3, 4...

S'il vous reste du temps !

Les points d'une orbite périodique de période p sont les points fixes de $f \circ f \circ \ldots \circ f = f^p$. Essayez la méthode de Newton pour les fonctions $f \circ f$, $f \circ f \circ f$ et $f \circ f \circ f \circ f$ et les plages de paramètres indiquées en introduction comme conduisant à des orbites périodiques de la période correspondante.