

Un exemple de A à Z (I)

Modélisation physique et numérique

Marc Tajchman

CEA Saclay, DEN/DM2S/STMF/LGLS

8 octobre 2012

On se place en dans un domaine de l'espace en 2 dimensions (carré $[0, 1] \times [0, 1]$ pour simplifier).

- La simulation numérique consiste à calculer (une approximation) de l'évolution en temps de l'écoulement d'un fluide parfait (non visqueux et conductivité thermique) et qui suit la loi de comportement des gaz parfaits.
- Les inconnues du problème sont la **masse volumique** (ρ), la **vitesse** $\mathbf{u} = (u, v)$ et la **pression** P en tout point du domaine et à tout instant.
- Les données fournies sont, en plus des caractéristiques du fluide :
 - l'état initial (l'écoulement au temps $t=0$: $\rho(x, y, 0)$, $\mathbf{u}(x, y, 0)$, $P(x, y, 0)$),
 - les conditions aux limites sur les bords du domaine (vitesse ou pression imposées, mur, etc).

De plus, au cours du calcul, on utilisera 2 jeux de variables pour représenter les inconnues :

- les variables primitives $\mathbf{V} = (\rho, \mathbf{u}, P)$ (mieux adaptées au modèle physique),
- les variables conservatives $\mathbf{U} = (\rho, \rho\mathbf{u}, E)$, où E est l'énergie totale (mieux adaptées aux méthodes numériques).

Ces 2 jeux de variables sont interchangeables (i.e. on peut calculer l'un en fonction de l'autre)

L'évolution en temps du fluide suit les équations d'Euler :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) &= 0 \\ \frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \times \mathbf{u}) + \nabla P &= 0\end{aligned}\quad (1)$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}(E + P)) = 0$$

+ relation de comportement (gaz parfaits) : $P = (\gamma - 1)\rho\epsilon$

(par définition, $\epsilon = \frac{E}{\rho} - \frac{1}{2}|\mathbf{u}|^2$)

+ conditions aux limites

De façon condensée

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial F^x}{\partial x} + \frac{\partial F^y}{\partial y} = 0 \quad (2)$$

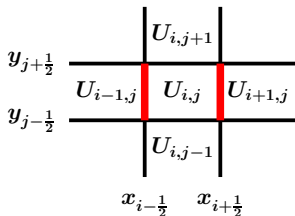
avec $\mathbf{U} = (\rho, \rho \mathbf{u}, E)$ et

$$\begin{aligned}F^x &= (\rho u, \rho u^2 + P, \rho uv, u(E + P))^T \\ F^y &= (\rho v, \rho uv + P, \rho v^2, v(E + P))^T\end{aligned}$$

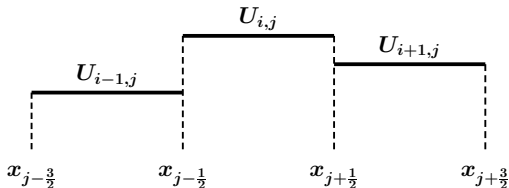
La méthode numérique est celle des volumes finis, les inconnues sont

$$U_{i,j}^n = \int_{[x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}] \times [y_{j-\frac{1}{2}}, y_{j+\frac{1}{2}}]} U(x, y, t_n) \, dx \, dy$$

Vue “d’en haut” à $t = t_n$



Coupe en $y = y_j$



et les équations discrétisées sont ($\Delta t_n = t_{n+1} - t_n$) :

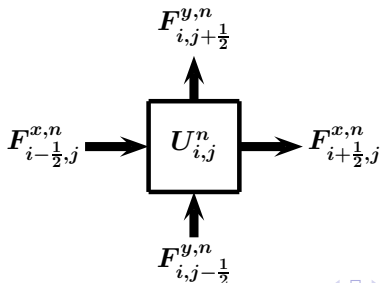
$$U_{i,j}^{n+1} = U_{i,j}^n + h \Delta t_n (F_{i+\frac{1}{2},j}^{x,n} - F_{i-\frac{1}{2},j}^{x,n} + F_{i,j+\frac{1}{2}}^{y,n} - F_{i,j-\frac{1}{2}}^{y,n}) \quad (3)$$

où

$$F_{i+\frac{1}{2},j}^{x,n} = \frac{1}{h} \int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} F^x(x_{i+\frac{1}{2}}, y, t_n) dy$$

est le flux moyen à travers le segment $[x_{i+\frac{1}{2}}] \times [y_{j-\frac{1}{2}}, y_{j+\frac{1}{2}}]$.

(expression analogue pour les autres termes, version explicite en temps)



On suppose qu'il existe un état intermédiaire sur chaque interface $U_{i+\frac{1}{2},j}^*$ tel que

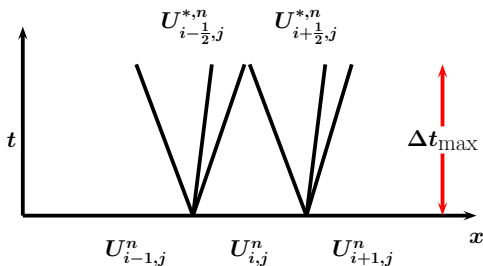
$$F^x(U_{i+\frac{1}{2},j}^{n,*}) = \int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} F^x(x_{i+\frac{1}{2}}, y, t_n) dy$$

Même situation sur les autres interfaces.

$U_{i+\frac{1}{2},j}^*$ est la solution d'un problème 1D de Riemann, avec une condition initiale en $t = t_n$

- constante = $U_{i,j}^n$ à gauche et
- constante = $U_{i+1,j}^n$ à droite.

Pour que une solution de Riemann sur une interface ne perturbe pas les interfaces voisines, il faut que $\Delta t_n = t_{n+1} - t_n$ soit assez petit (valeur à calculer à chaque itération).



Pour éviter des extrema locaux aux interfaces (sans signification physique), on utilise un limiteur de pente.

Méthode des directions alternées (AD)

Au lieu de calculer (schéma 1):

$$U_{i,j}^{n+1} = U_{i,j}^n + h \Delta t_n \left[F^x(U_{i+\frac{1}{2},j}^{n,*}) - F^x(U_{i-\frac{1}{2},j}^{n,*}) \right. \\ \left. + F^y(U_{i,j+\frac{1}{2}}^{n,*}) - F^y(U_{i,j-\frac{1}{2}}^{n,*}) \right]$$

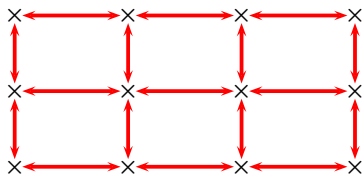
On procède en deux étapes (schéma 2):

$$U_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} = U_{i,j}^n + h \Delta t_n \left[F^x(U_{i+\frac{1}{2},j}^{n,*}) - F^x(U_{i-\frac{1}{2},j}^{n,*}) \right]$$

suivi de

$$U_{i,j}^{n+1} = U_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + (t_{n+1} - t_n) \left[F^y(U_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2},*}) - F^y(U_{i,j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2},*}) \right]$$

Dans le schéma 1, les relations de dépendances entre cellules (i,j) sont :



Dans le schéma 2, les relations de dépendances sont différentes dans les 2 étapes:

