

Analyse topologique de données pour le suivi temporel de débris à haute vitesse en physique des matériaux

Julien Tierny, Fabien Vivodtzev, David Hebert

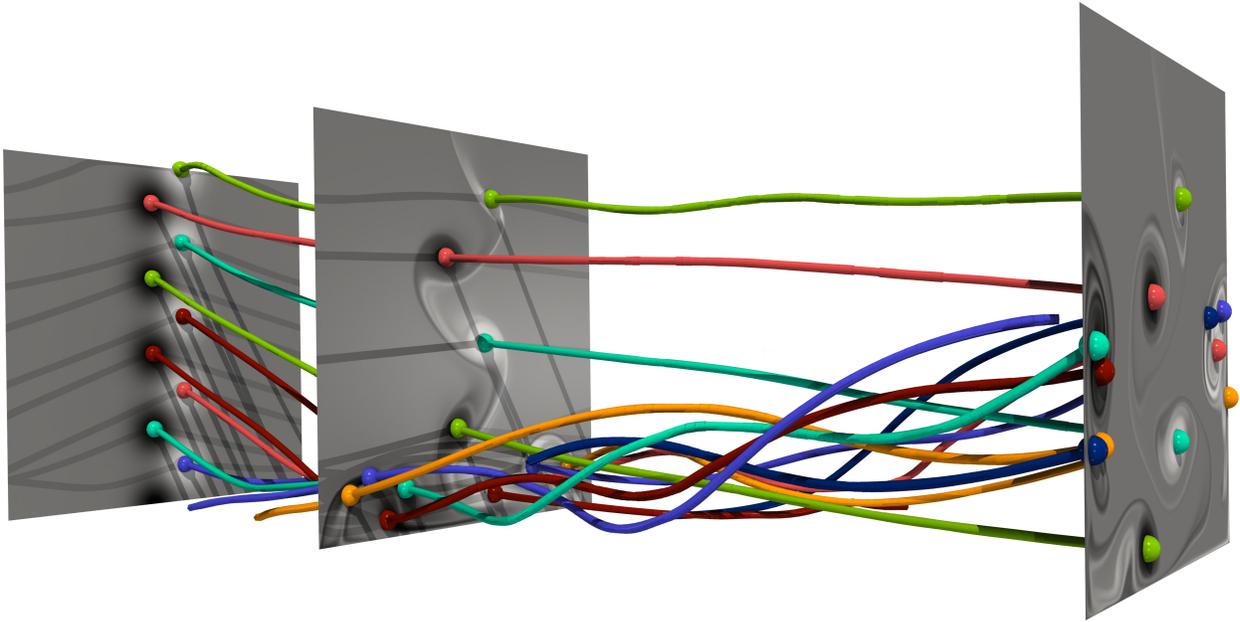


Fig. 1. Le sujet en une image – L’analyse topologique de données permet d’identifier de manière robuste des structures d’intérêt au sein de données complexes. Dans le cas de données variant dans le temps, il est possible d’extraire ces structures (ici les centres de tourbillons en mécanique des fluides) pour chaque pas de temps, puis d’estimer un appariement optimal entre les structures de deux pas de temps consécutifs, afin de reconstruire les trajectoires des structures d’intérêt au cours du temps (trajectoires de couleur, de gauche à droite). Ces trajectoires sont ensuite utilisées dans les applications en entrée d’une étude statistique. Dans ce stage, nous souhaitons étendre une approche récente de l’état de l’art [47] (utilisée dans cette figure) pour la rendre plus robuste sur des données expérimentales d’acquisition particulièrement difficiles, représentant des données à haute vélocité en physique des matériaux (Fig. 3).



1 CONTEXTE

L’analyse topologique de données (TDA) [9, 14, 38, 50, 51] est une thématique à cheval entre informatique et mathématiques appliquées, qui propose d’extraire, de mesurer et de comparer des informations structurelles cachées au sein de données complexes. Elle repose sur des concepts de topologie [35] documentés dans des livres de référence [14]. Elle connaît un essor important depuis quelques années, dû principalement à ses succès en analyse et visualisation de données [38, 51], en science des données [13, 39–41, 45], en machine learning [8, 12], ainsi qu’aux développements open-source récents la mettant en oeuvre [2, 24, 52].

L’analyse topologique de données repose aujourd’hui sur une boîte à outil de représentations topologiques de données (comme le diagramme de persistance [14, 15, 54, 55], le graphe de Reeb [20–23, 42, 53], le complexe de Morse-Smale [18, 27, 34]) dont la concision et la pertinence pratique ont été documentées dans de nombreuses ications, comme en imagerie médicale [3, 7], en biologie cellulaire [28], en mécanique des fluides [6, 10, 30, 36, 56], en physique des matériaux [16, 33, 46],

en combustion [4, 5, 26, 32], en chimie moléculaire [1, 19, 37], en astrophysique [44, 49], en compression [48] ou encore en monitoring de simulations numériques haute-performance [17, 43].

2 PROBLÈME SCIENTIFIQUE

Cadre méthodologique: Dans ce stage, nous nous intéresserons à l’élément le plus populaire de cette boîte à outil: le diagramme de persistance [14, 15, 25] (Fig. 2). Ce diagramme encode les structures d’intérêt présentes dans les données sous la forme de barres verticales disposées dans le plan, dont la longueur encode une mesure d’importance appelée *persistance topologique* [15]. Cette mesure d’importance a la particularité d’être à la fois solidement établie d’un point de vue théorique, et extrêmement pertinente dans les applications pratiques, pour distinguer les structures d’intérêt du bruit ambiant (Fig. 2b). Par ailleurs, ce diagramme est stable face à l’ajout de bruit (Fig. 2b), ce qui en fait une signature robuste dans des problèmes de classification [36].

Dans de nombreuses applications, les données varient dans le temps. Il devient alors nécessaire de mettre en oeuvre des méthodes de suivi temporel des structures topologiques, afin d’analyser ensuite la trajectoire des structures d’intérêt (comme le centre des tourbillons en mécanique des fluides, Fig. 1). Une technique récente de l’état de l’art [47] permet d’obtenir un suivi pertinent dans le cas de données issues de simulations numériques (voir Fig. 1). Cette technique repose sur un problème d’optimisation d’appariement entre les diagrammes de persistance correspondant à deux pas de temps successifs.

- Julien Tierny is with Sorbonne Université, CNRS, LIP6 UMR 7606, France. E-mail: julien.tierny@sorbonne-universite.fr.
- Fabien Vivodtzev and David Hebert are with CEA, CESTA, Le Barp, France. E-mail: fistname.lastname@cea.fr.

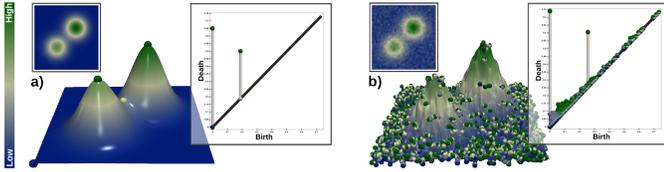


Fig. 2. Le diagramme de persistance est une signature topologique de donnée simple, sur laquelle nous travaillerons pendant ce stage. Elle permet de réduire les données en entrée (mélange Gaussien, illustré par un terrain, (a)) en un diagramme 2D (à droite) représentant par une barre verticale chaque structure topologique (composante connexe, cycle, cavité, etc.) observée dans les données, en fonction de son importance dans les données (longueur de la barre). Cette représentation permet de résumer de manière concise les structures principales présentes dans un jeu de données et présente des propriétés de stabilité intéressante en présence de bruit (b), où les structures bruitées vont typiquement être localisées près de la diagonale. Dans cet exemple, le diagramme de gauche comprend deux barres, représentant les deux Gaussiennes du jeu de données. Le diagramme de droite comprend un grand nombre de barres, notamment près de la diagonale, étant donné le bruit ajouté dans les données. Cependant, deux barres principales (représentant les deux Gaussiennes originales) se distinguent clairement.

Cependant, cette technique peut être mise à défaut sur des données plus difficiles, notamment contenant un fort niveau de bruit, variant au cours du temps, comme ça peut être le cas dans des processus d'acquisitions (e.g. films vidéos acquis). L'apport de robustesse aux méthodes de suivi existantes [47] devient alors un challenge scientifique difficile, dont la solution ouvrirait pourtant de très nombreuses perspectives d'applications pratiques.

Cadre applicatif: Le centre du CEA CESTA (près de Bordeaux) procède ponctuellement à des essais de résistance de matériaux, face à l'impact de projectiles lancés à très grande vitesse (plus de 10 000 km/h). La réponse mécanique du matériaux qui s'en suit dure une fraction de seconde (typiquement 1 μs). L'onde de choc au sein du matériaux le fragmente en un grand nombre d'éclats, de tailles variables, propulsés à des vitesses variables (de 3 à 4000 km/h) hors du matériau (voir Fig. 3). La compréhension statistique de la population de ces fragments (vis à vis de leur taille et de leur vitesse) est un élément crucial pour l'évaluation de la résistance du matériau et concerne plusieurs applications notamment la défense planétaire [29] (déflagration d'astéroïde par impact cinétique). Pour évaluer ces grandeurs, des expériences d'impacts à échelle réduite sont filmées, à l'aide de caméras offrant une très grande résolution temporelle. Les données générées sont alors représentées sous la forme d'un champ scalaire (intensité lumineuse par pixel) variant dans le temps.

Dans ce contexte, les chercheurs du CEA souhaiteraient effectuer un suivi temporel des fragments dans ces vidéos. Cependant, ces données sont particulièrement difficiles: les images sont bruitées, certains fragments ont une taille de l'ordre du pixel, la vitesse des fragments est très variable, etc. Par ailleurs, étant donné la nature spécifique de ces vidéos, il n'est pas réaliste de mettre en oeuvre des méthodes de suivi supervisées, la constitution d'une base d'apprentissage n'étant pas possible d'un point de vue pratique. En effet, peu d'exemplaires de ces vidéos existent étant donné leur coût élevé de production. Par ailleurs, chaque image de ces vidéos contient plusieurs centaines de fragments, rendant une labellisation manuelle fiable peu pratique.

Une étude préliminaire de ces données avec une approche récente basée sur l'appariement optimal de diagrammes de persistance [47] a donné des résultats extrêmement prometteurs, permettant d'extraire de manière précise la trajectoire de la majorité des fragments (Fig. 3). Cependant, le suivi fiable du reste des fragments est perturbé étant donné la difficulté des données, donnant lieu à des discontinuités des trajectoires (perte de suivi entre pas de temps successifs) ou à certains suivis incorrects (fragments à très haute vitesse).

Dans ce stage, nous souhaitons donc:

1. concevoir, implémenter et expérimenter des extensions de notre

approche de suivi temporel de diagrammes de persistance, afin de la rendre plus robuste face à des données difficiles;

2. exploiter les trajectoires produites pour mener des études statistiques sur la taille et la vitesse des fragments.

3 PERSPECTIVES

Ce stage est proposé dans l'optique d'une **poursuite en thèse de doctorat** sur le thème de l'analyse topologique de données, dans le cadre d'une collaboration entre le CEA et Sorbonne Université.

De manière plus générale, ce stage et sa poursuite en thèse apporteront un bagage de compétences scientifiques et techniques pointues et recherchées dans le domaine de l'analyse de données (TDA, TTK [52], ParaView [57]). Il constitue donc une expérience fortement valorisable pour accéder à des fonctions R&D sur ces thèmes, dans le monde académique comme industriel (Kitware, EDF, Total, etc.).

4 ORGANISATION DU STAGE

Le stage pourra se dérouler selon les étapes suivantes:

1. Etudier la bibliographie existante sur:
 - l'analyse topologique de données [14, 50];
 - l'appariement optimal de diagrammes [11, 31];
 - le suivi temporel de structures topologiques [47].
2. Amélioration de la robustesse de la méthode de suivi temporel [47] de structures topologiques, possiblement selon les pistes suivantes:
 - Par post-traitement:
 - Re-connection de trajectoires par heuristiques géométriques;
 - Re-connection de trajectoires par extrapolation temporelle;
 - Par modification des critères d'appariement, possiblement selon les pistes suivantes:
 - Prise en compte de critères géométriques (taille des fragments);
 - Prise en compte de la variabilité de vitesse des fragments
3. Exploitation géométrique et statistique du suivi:
 - Extraction de caractéristiques géométriques depuis les trajectoires de suivi (e.g. taille des structures, vitesses, etc.)
 - Exploitation statistique des informations de suivi et étude de corrélation avec des mesures d'acquisition complémentaires (captation partielle de fragments par gel).

Les programmes d'expérimentation seront écrits en C++, sous la forme de modules pour la plate-forme open-source d'analyse topologique de données "Topology ToolKit" (TTK) [52] (intégrée à ParaView [57]).

Le stage peut durer de 16 à 24 semaines, selon les disponibilités du stagiaire, à partir du 7 Avril 2025. Il s'agit d'un stage rémunéré.

5 PROFIL

Nous recherchons un(e) étudiant(e) très motivé(e)! Curiosité, ouverture d'esprit, créativité, et ténacité sont les aptitudes de caractère que nous recherchons. Ce stage s'adresse aux étudiants détenteurs d'un master en informatique ou mathématiques appliquées (et domaines connexes) ou d'un diplôme d'ingénieurs. Le candidat devra être à l'aise avec la programmation en C++, ou motivé pour le devenir. Un intérêt pour la géométrie, la topologie et plus généralement pour les mathématiques et l'informatique est requis.

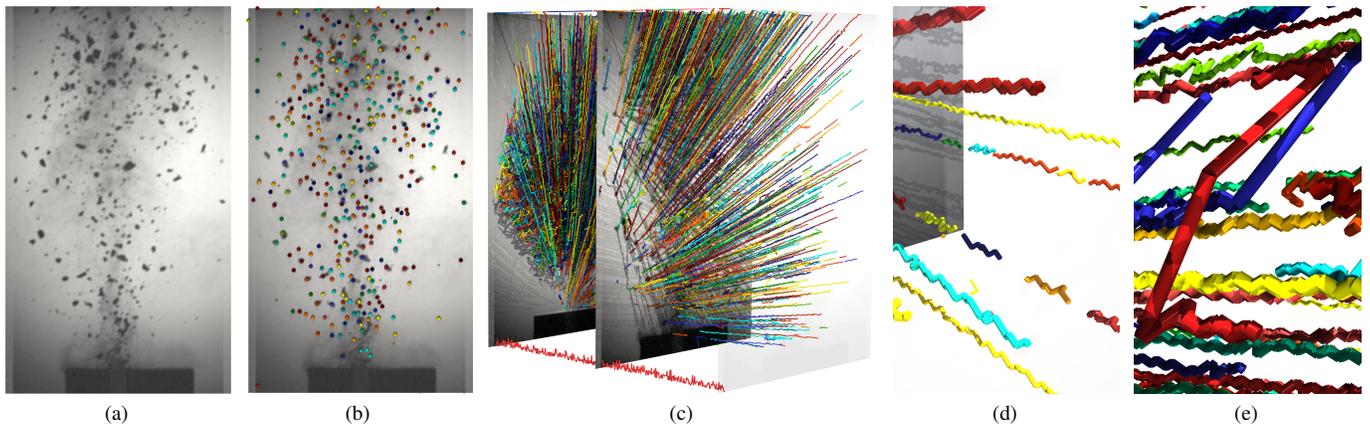


Fig. 3. Etude préliminaire de suivi temporel de fragments par appariement optimal de diagramme de persistance [47]. Sur les données en entrée (Fig. 3(a)), les fragments sont caractérisés par des taches sombres, de taille et d'intensité lumineuse variables. Le diagramme de persistance (Fig. 3(b)) permet de capturer de manière fiable et robuste la population de fragment en considérant les minima locaux du champ (sphères de couleur), qui sont impliqués dans des barres au delà d'une certaine longueur (d'une certaine persistance). L'appariement optimal calculé entre chaque paire de pas de temps consécutifs [47] permet de reconstruire les trajectoires de la très grande majorité des fragments (Fig. 3(c)). Cependant, certaines erreurs apparaissent durant la reconstruction de la trajectoire, faisant émerger des discontinuités (Fig. 3(d)) ou des erreurs d'appariement entre fragments (Fig. 3(e)). Dans ce stage, nous souhaitons (i) étendre la méthode de suivi pour la rendre plus robuste face à ces cas d'échecs, puis (ii) exploiter d'un point de vue statistique les trajectoires générées afin d'étudier leur corrélation à des mesures d'acquisition complémentaires.

6 LIEU

Le stage pourra avoir lieu à Sorbonne Université (Paris) ou au centre CESTA du CEA (près de Bordeaux). Il sera encadré par Julien Tierny (directeur de recherche au CNRS, expert en analyse topologique de données, <https://julien-tierny.github.io/>), Fabien Vivodtzev (expert en analyse de données scientifiques, <https://fabien-vivodtzev.github.io/>) et David Hebert (expert en physique des matériaux).

7 CANDIDATURES

Nous invitons les candidat(e)s à nous faire parvenir leur lettre de candidature accompagnée d'un CV à jour à Julien Tierny (julien.tierny@sorbonne-universite.fr), Fabien Vivodtzev (fabien.vivodtzev@cea.fr) et David Hebert (david.hebert@cea.fr). Nous vous encourageons à nous contacter par email pour toute question ou pour discuter davantage du sujet.

REFERENCES

- [1] H. Bhatia, A. G. Gyulassy, V. Lordi, J. E. Pask, V. Pascucci, and P.-T. Bremer. Topoms: Comprehensive topological exploration for molecular and condensed-matter systems. *J. of Computational Chemistry*, 39(16):936–952, 2018. doi: 10.1002/JCC.25181
- [2] T. Bin Masood, J. Budin, M. Falk, G. Favelier, C. Garth, C. Gueunet, P. Guillou, L. Hofmann, P. Hristov, A. Kamakshidasan, C. Kappe, P. Klacansky, P. Laurin, J. Levine, J. Lukaszcyk, D. Sakurai, M. Soler, P. Steneteg, J. Tierny, W. Usher, J. Vidal, and M. Wozniak. An Overview of the Topology Toolkit. In *TopInVis*, 2019.
- [3] A. Bock, H. Doraiswamy, A. Summers, and C. Silva. Topoangler: Interactive topology-based extraction of fishes. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics (Proc. of IEEE VIS)*, 2017.
- [4] P. Bremer, G. Weber, J. Tierny, V. Pascucci, M. Day, and J. Bell. A topological framework for the interactive exploration of large scale turbulent combustion. In *Proc. of IEEE eScience*, 2009.
- [5] P. Bremer, G. Weber, J. Tierny, V. Pascucci, M. Day, and J. Bell. Interactive exploration and analysis of large scale simulations using topology-based data segmentation. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, 2011.
- [6] T. Bridel-Bertomeu, B. Fovet, J. Tierny, and F. Vivodtzev. Topological Analysis of High Velocity Turbulent Flow. In *IEEE Symposium on Large Data Analysis and Visualization (posters)*, 2019.
- [7] H. Carr, J. Snoeyink, and M. van de Panne. Simplifying flexible isosurfaces using local geometric measures. In *IEEE VIS*, 2004.
- [8] F. Chazal, L. Guibas, S. Oudot, and P. Skraba. Persistence-based clustering in Riemannian manifolds. *Journal of the ACM*, 2013.
- [9] F. Chazal and J. Tierny. Topological data analysis, online class. <http://lip6.fr/Julien.Tierny/topologicalDataAnalysisClass.html>.
- [10] F. Chen, H. Obermaier, H. Hagen, B. Hamann, J. Tierny, and V. Pascucci. Topology analysis of time-dependent multi-fluid data using the reeb graph. *Computer Aided Geometric Design*, 2013.
- [11] D. Cohen-Steiner, H. Edelsbrunner, and J. Harer. Stability of persistence diagrams. In *Symp. on Comp. Geom.*, 2005.
- [12] R. Cotsakis, J. Shaw, J. Tierny, and J. A. Levine. Implementing Persistence-Based Clustering of Point Clouds in the Topology Toolkit. In *TopInVis Book*, 2020.
- [13] H. Doraiswamy, J. Tierny, P. J. S. Silva, L. G. Nonato, and C. Silva. TopoMap: A 0-dimensional Homology Preserving Projection of High-Dimensional Data. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics (Proc. of IEEE VIS)*, 2020.
- [14] H. Edelsbrunner and J. Harer. *Computational Topology: An Introduction*. American Mathematical Society, 2009.
- [15] H. Edelsbrunner, D. Letscher, and A. Zomorodian. Topological persistence and simplification. *Disc. Compu. Geom.*, 2002.
- [16] G. Favelier, C. Gueunet, and J. Tierny. Visualizing ensembles of viscous fingers. In *IEEE SciVis Contest*, 2016.
- [17] M. Flatken, A. Podobas, R. Fellegara, A. Basermann, J. Holke, D. Knapp, M. Kontak, C. Krullikowski, M. Nolde, N. Brown, R. Nash, G. Gibb, E. Belikov, S. W. D. Chien, S. Markidis, P. Guillou, J. Tierny, J. Vidal, C. Gueunet, J. Günther, M. Pawlowski, P. Poletti, G. Guzzetta, M. Manica, A. Zardini, J. Chaboureaud, M. Mendes, A. Cardil, S. Monedero, J. Ramírez, and A. Gerndt. VESTEC: visual exploration and sampling toolkit for extreme computing. *IEEE Access*, 2023.
- [18] R. Forman. A user's guide to discrete Morse theory. *Adv. in Math.*, 1998.
- [19] D. Guenther, R. Alvarez-Boto, J. Contreras-Garcia, J.-P. Piquemal, and J. Tierny. Characterizing molecular interactions in chemical systems. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics (Proc. of IEEE VIS)*, 2014.
- [20] C. Gueunet, P. Fortin, J. Jomier, and J. Tierny. Contour forests: Fast multi-threaded augmented contour trees. In *IEEE LDAV*, 2016.
- [21] C. Gueunet, P. Fortin, J. Jomier, and J. Tierny. Task-based Augmented Merge Trees with Fibonacci Heaps. In *IEEE LDAV*, 2017.
- [22] C. Gueunet, P. Fortin, J. Jomier, and J. Tierny. Task-based Augmented Contour Trees with Fibonacci Heaps. *IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems*, 2019. Accepted.
- [23] C. Gueunet, P. Fortin, J. Jomier, and J. Tierny. Task-based Augmented Reeb Graphs with Dynamic ST-Trees. In *Eurographics Symposium on Parallel Graphics and Visualization*, 2019.
- [24] E. L. Guillou, M. Will, P. Guillou, J. Lukaszcyk, P. Fortin, C. Garth, and

- J. Tierny. TTK is Getting MPI-Ready. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, 2024.
- [25] P. Guillou, J. Vidal, and J. Tierny. Discrete Morse Sandwich: Fast Computation of Persistence Diagrams for Scalar Data – An Algorithm and A Benchmark. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, 30(4):1897–1915, 2023. doi: 10.1109/TVCG.2023.3238008
- [26] A. Gyulassy, P. Bremer, R. Grout, H. Kolla, J. Chen, and V. Pascucci. Stability of dissipation elements: A case study in combustion. *Computer Graphics Forum (Proc. of EuroVis)*, 2014.
- [27] A. Gyulassy, P. T. Bremer, B. Hamann, and V. Pascucci. A practical approach to morse-smale complex computation: Scalability and generality. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics (Proc. of IEEE VIS)*, 2008.
- [28] A. Gyulassy, D. Guenther, J. A. Levine, J. Tierny, and V. Pascucci. Conforming morse-smale complexes. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics (Proc. of IEEE VIS)*, 2014.
- [29] K. Housen and K. Holsapple. Ejecta from impact craters. *Icarus*, 211:856–875, 01 2011. doi: 10.1016/j.icarus.2010.09.017
- [30] J. Kasten, J. Reininghaus, I. Hotz, and H. Hege. Two-dimensional time-dependent vortex regions based on the acceleration magnitude. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, 2011.
- [31] M. Kerber, D. Morozov, and A. Nigmatov. Geometry helps to compare persistence diagrams. *ACM Journal of Experimental Algorithmics*, 22, 2016. Article No. 1.4.
- [32] D. E. Laney, P. Bremer, A. Mascarenhas, P. Miller, and V. Pascucci. Understanding the structure of the turbulent mixing layer in hydrodynamic instabilities. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics (Proc. of IEEE VIS)*, 2006.
- [33] J. Lukaszczuk, G. Aldrich, M. Steptoe, G. Favelier, C. Gueunet, J. Tierny, R. Maciejewski, B. Hamann, and H. Leitte. Viscous fingering: A topological visual analytic approach. In *Physical Modeling for Virtual Manufacturing Systems and Processes*, 2017.
- [34] J. Milnor. *Morse Theory*. Princeton U. Press, 1963.
- [35] MyWhyU. A humorous look at the topology of curved space. <https://www.youtube.com/watch?v=p2ofJPh2yMw&list=PL09E9E697F585A58C>.
- [36] F. Nauleau, F. Vivodtzev, T. Bridel-Bertomeu, H. Beaugendre, and J. Tierny. Topological Analysis of Ensembles of Hydrodynamic Turbulent Flows – An Experimental Study. pp. 1–11. Los Alamitos, 2022. doi: 10.1109/LDAV57265.2022.9966403
- [37] M. Olejniczak and J. Tierny. Topological Data Analysis of Vortices in the Magnetically-Induced Current Density in LiH Molecule. *PCCP*, 25:5942–5947, 2023. doi: 10.1039/D2CP05893F
- [38] V. Pascucci, X. Tricoche, H. Hagen, and J. Tierny. *Topological Methods in Data Analysis and Visualization: Theory, Algorithms and Applications*. Springer, 2010.
- [39] M. Pont and J. Tierny. Wasserstein Auto-Encoders of Merge Trees (and Persistence Diagrams). *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, 2024.
- [40] M. Pont, J. Vidal, J. Delon, and J. Tierny. Wasserstein Distances, Geodesics and Barycenters of Merge Trees. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics (Proc. of IEEE VIS)*, 2021.
- [41] M. Pont, J. Vidal, and J. Tierny. Principal Geodesic Analysis of Merge Trees (and Persistence Diagrams). *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, 2023.
- [42] G. Reeb. Sur les points singuliers d’une forme de Pfaff complètement intégrable ou d’une fonction numérique. *Acad. des Sci.*, 1946.
- [43] E. Santos, J. Tierny, A. Khan, B. Grimm, L. Lins, J. Freire, V. Pascucci, C. Silva, S. Klasky, R. Barreto, and N. Podhorszki. Enabling advanced visualization tools in a web-based simulation monitoring system. In *Proc. of IEEE eScience*, 2009.
- [44] N. Shivashankar, P. Pranav, V. Natarajan, R. van de Weygaert, E. P. Bos, and S. Rieder. Felix: A topology based framework for visual exploration of cosmic filaments. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, 2016. <http://vgl.serc.iisc.ernet.in/felix/index.html>.
- [45] K. Sisouk, J. Delon, and J. Tierny. Wasserstein Dictionaries of Persistence Diagrams. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics (Proc. of IEEE VIS)*, 2024.
- [46] M. Soler, M. Petitfrere, G. Darce, M. Plainchault, B. Conche, and J. Tierny. Ranking Viscous Finger Simulations to an Acquired Ground Truth with Topology-Aware Matchings. In *IEEE Symposium on Large Data Analysis and Visualization*, 2019.
- [47] M. Soler, M. Plainchault, B. Conche, and J. Tierny. Lifted Wasserstein matcher for fast and robust topology tracking. In *Proc. of IEEE Symposium on Large Data Analysis and Visualization*, 2018.
- [48] M. Soler, M. Plainchault, B. Conche, and J. Tierny. Topologically controlled lossy compression. In *Proc. of IEEE PacificViz*, 2018.
- [49] T. Sousbie. The persistent cosmic web and its filamentary structure: Theory and implementations. *Royal Astronomical Society*, 2011. <http://www2.iap.fr/users/sousbie/web/html/indexd41d.html>.
- [50] J. Tierny. Introduction to topological data analysis. <https://hal.archives-ouvertes.fr/cel-01581941/file/manuscript.pdf>.
- [51] J. Tierny. *Topological Data Analysis for Scientific Visualization*. Springer, 2018.
- [52] J. Tierny, G. Favelier, J. A. Levine, C. Gueunet, and M. Michaux. The Topology ToolKit. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics (Proc. of IEEE VIS)*, 2017. <https://topology-tool-kit.github.io/>.
- [53] J. Tierny, A. Gyulassy, E. Simon, and V. Pascucci. Loop surgery for volumetric meshes: Reeb graphs reduced to contour trees. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics (Proc. of IEEE VIS)*, 2009.
- [54] J. Vidal, P. Guillou, and J. Tierny. A Progressive Approach to Scalar Field Topology. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, 2021.
- [55] J. Vidal and J. Tierny. Fast Approximation of Persistence Diagrams with Guarantees. In *IEEE Symposium on Large Data Analysis and Visualization*, 2021.
- [56] F. Vivodtzev, F. Nauleau, J.-P. Braeunig, and J. Tierny. Identifying Locally Turbulent Vortices within Instabilities. In *IEEE Symposium on Large Data Analysis and Visualization (posters)*, 2024.
- [57] Wikipedia. ParaView. <https://en.wikipedia.org/wiki/ParaView>.