

Étude comparative des méthodes de volumes finis et des PINNs pour l'équation de Richards

Contexte & modèle mathématique

Les écoulements surfaciques d'eau jouent un rôle clé dans la gestion durable des ressources en eau et dans la prévision des risques hydrologiques. Le modèle de Richards est souvent utilisé pour caractériser la dynamique de l'eau dans les sols non saturés. Il met en relation la teneur en eau $\theta(\psi)$, la conductivité hydraulique $\eta(\psi)$ et la pression capillaire ψ [6, 4]

$$\phi(x) \frac{\partial \theta(\psi)}{\partial t} - \operatorname{div} \left(\eta(\psi) \Lambda(x) \nabla (\psi + z) \right) = 0, \quad \Omega \times (0, t_f), \quad (1)$$

où $\phi(x)$ est la porosité du milieu Ω représentant le sol, $\Lambda(x)$ désigne sa perméabilité et z la profondeur verticale. Le temps final est donné par t_f . L'équation (1) est complétée par un état initial et des conditions aux limites appropriées.

L'équation de Richards est fortement non-linéaire et elle peut dégénérer. Cela peut rendre la résolution du schéma numérique, de type volumes finis par exemple, délicate, voire inefficace dans le cadre des hétérogénéités. Certaines solutions existent déjà afin de remédier à ce problème [3, 2, 8].

Dans le cadre de ce stage, on étudiera un modèle de Deep Learning pour le problème de Richards. Il est connu sous le nom de réseaux de neurones guidés par la physique du système : PINNs (Physical-Informed Neural Networks). C'est une approche sans maillage qui permet d'introduire le comportement du modèle, le résidu de l'EDPs, dans le processus d'entraînement [7, 5, 1]. Elle pourrait être utilisée pour l'accélération du solveur non linéaire.

Objectif du stage

L'objectif principal de ce stage est de développer un solveur volumes finis robuste basé sur les PINNs pour résoudre l'équation de Richards en 2D dans des sol présentant différentes hétérogénéités. Dans un premier temps, le (la) stagiaire s'appropriera des fonctionnalités d'un code existant développé en interne. Ensuite, il s'agira d'implémenter, intégrer et valider un module PINNs pour le même problème. Enfin, il va falloir réaliser une comparaison des résultats numériques de différentes combinaisons avec des solutions de référence, et analyser la sensibilité du solveur aux paramètres physiques du modèle et au maillage choisi.

Encadrement

Ce stage de Master sera encadré conjointement par : Catherine Choquet, Professeur des Universités à La Rochelle Université catherine.choquet@univ-lr.fr et El-Houssaine Quenjel, Professeur Junior à La Rochelle Université el-houssaine.quenjel@univ-lr.fr

Profil

Bac+5 en Math Appliquées ou équivalent. Le candidat (ou la candidate) doit avoir des compétences en Deep Learning et en calcul scientifique, avec un savoir-faire en programmation sous Python. Des connaissances en volumes finis seraient aussi appréciées. L'étudiant(e) doit être autonome, dynamique et posséder un bon esprit d'équipe.

Candidature

Pour postuler, les candidat(e)s peuvent envoyer, en un seul fichier PDF, un CV détaillé, une lettre de motivation, une lettre de recommandation, et les relevés de notes de Master et licence aux adresses électroniques des deux encadrants.

Date et lieu

La durée du stage est de 6 mois, du 01 Février 2025 au 31 Août 2025. Le stage sera effectué au Laboratoire Mathématiques, Image et Applications de La Rochelle Université.

Références

- [1] J. Aghili, E. Franck, R. Hild, V. Michel-Dansac, and V. Vigon. Accelerating the convergence of Newton's method for nonlinear elliptic PDEs using Fourier neural operators. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 140:108434, 2025.
- [2] I. Bevilacqua, D. Canone, and S. Ferraris. Acceleration techniques for the iterative resolution of the Richards equation by the finite volume method. *International Journal for Numerical Methods in Biomedical Engineering*, 27(8):1309–1320, 2011.
- [3] K. Brenner. On the monotone convergence of Jacobi–Newton method for mildly nonlinear systems. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 419:114719, 2023.
- [4] M. W. Farthing and F. L. Ogden. Numerical solution of Richards' equation: A review of advances and challenges. *Soil Science Society of America Journal*, 81(6):1257–1269, 2017.
- [5] X. Gong and Y. Zha. Physics-informed neural network with enhanced parameter-state coupling for inverse modeling of unsaturated flow in heterogeneous soils. *Water Resources Research*, 61(9):e2025WR040040, 2025.
- [6] R. Helmig. *Multiphase flow and transport processes in the subsurface: a contribution to the modeling of hydrosystems*, volume 1. Springer, 1997.
- [7] T. Li, Y. Zou, S. Zou, X. Chang, L. Zhang, and X. Deng. Learning to solve PDEs with finite volume-informed neural networks in a data-free approach. *Journal of Computational Physics*, 530:113919, 2025.
- [8] F. List and F. A. Radu. A study on iterative methods for solving Richards' equation. *Computational Geosciences*, 20(2):341–353, 2016.